

Exercice I

24/2025

partie 1

1° La matrice I_n vérifie $I_n^2 = I_n$ donc est idempotente
De même, $O_n^2 = O_n$ d'où O_n est idempotente

2° récrivons $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

donc $M^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M^2 = \frac{3}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M$

M est idempotente.

3° Les calculs menés en 2° permettent d'observer que
 $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \neq M$ donc M n'est pas idempotente.

4° Calculons $E_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$

$E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_2$

$E_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_3$

$E_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$

$E_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_5$

$E_6^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_6$

Conclusion (détails non demandés mais fournis pour aider)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
idempotente ?	oui	non	non	oui	oui	oui

partie 2

1° par définition, M idempotente vérifie $M^2 = M$ d'où $M^2 - M = 0_n$
→ en suit.

2° a) $M 0_n = 0_n = \lambda \cdot 0_n$ quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$ donc

On a bien pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ 0_n solution de (E_λ)

b) M vérifie $M^2 = M$ et, en supposant X solution de (E_λ)

$$\begin{aligned} \text{On a } MX &= \lambda X \Rightarrow M \cdot MX = M(\lambda X) \\ &\Rightarrow M^2 X = \lambda MX = \lambda^2 X \end{aligned}$$

Mais $M^2 = M$ donc on en déduit $MX = \lambda^2 X$ et
Comme $MX = \lambda X$ par hypothèse, il en résulte $\lambda X = \lambda^2 X$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$.

Supposons que (S_λ) associée à (E_λ) ne soit pas de
Cramer. Alors il existe $(x_1, \dots, x_n)$ solution non nulle

telle que $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En effet:

(S_λ) n'étant pas de Cramer, il existe une infinité de
solution puisque le cas "aucune solution" est rejeté

par 2° a). On peut donc se donner une autre solution
que $(0, \dots, 0)$. Ainsi par 2° b) il vient $MX = \lambda X$

$$\Rightarrow \lambda \cdot X = \lambda^2 \cdot X \quad \text{avec } X \neq 0_n$$

$$\text{Donc } \lambda = \lambda^2 \quad \text{et ainsi } \lambda^2 - \lambda = 0 \text{ d'où } \lambda(\lambda - 1) = 0$$

Ce qui fournit $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$: contradiction

car on a supposé

$$3^\circ \text{ On calcule } N^2 = (I_n - M)^2 = I_n^2 - 2I_n M + M^2 \text{ car } I_n$$

commute avec toute matrice carrée d'ordre n .

On obtient $N^2 = I_n - 2M + M$ car $M^2 = M$
 $= I_n - M = N$ par définition de N .

N est bien idempotente.

Partie 2 : programmation

1° l'entier t donné en sortie par l'appel de `identest(M)` fournit le nombre de coefficients égaux entre les matrices M et M^t
 2° l'appel de `identest(E2)` sur $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ renvoie 3
 car, par le calcul $E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on lit que 3 coefficients sont exactement ceux de E_2

3° on propose de remplacer "`return(t)`" par la séquence :

```
if t == n**2:
```

```
    return(1)
```

```
else:
```

```
    return(0)
```

pour remplir les conditions attendues.

partie 3 : Application

1° on calcule $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = C$

et $D^2 = (I_2 - C)^2 = I_2 - 2C + C = I_2 - C$

(technique similaire à 1°/3°)

Donc C et D sont idempotentes

On calcule $DC = (I_2 - C)C = C - C^2 = C - C = 0$

De même $CD = C(I_2 - C) = C - C^2 = C - C = 0$

Donc CD et DC sont nulles. En particulier, C et D commutent.

2/a) On pose $\mathcal{H}_n: B^n = 2^n C + D$ où $n \in \mathbb{N}$

On prouve $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{H}_n$ par récurrence:

Initialisation: pour $n=0$ on a $\mathcal{H}_0$ s'écrit $B^0 = 2^0 \cdot C + D$
Or $B^0 = I_2$ et $2^0 \cdot C + D = C + D = C + I_2 - C = I_2$
par définition de D ; $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.

Hérédité: Supposons que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ fixé
On ait $B^n = 2^n C + D$. On calcule alors:

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \cdot B = (2^n C + D)B \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (2^n C + D)(2C + D) \text{ par définition de } B \\ &= 2^{n+1} C^2 + 2DC + 2^n CD + D^2 \\ &= 2^{n+1} C^2 + 2 \times 0 + 2^n \times 0 + D^2 \text{ car } CD = DC = 0 \\ &= 2^{n+1} C + D \text{ car } C \text{ et } D \text{ sont idempotentes} \end{aligned}$$

(d'après 1°). Nous avons établi $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$ $B^n = 2^n C + D$

b) Il vient alors $B^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2 & 0-1 \\ 0+2 & 1+1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

3/a) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

ceci se réécrit $P \cdot P = I_2$ établissant que P est inversible
d'inverse $P^{-1} = P$

b) On calcule $P^{-1} A P = P A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

On observe que $C + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B$

en effet $B = 2C + D = C + C + I_2 - C = C + I_2$

On peut donc remarquer que $P^{-1}AP = B$

c) De 3°/b) On a donc $A = PB P^{-1}$. On va alors montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P B^n P^{-1}$

Initialisation: Pour $n=0$ on a $A^0 = I_2$ et $P B^0 P^{-1} = P P^{-1} = I_2$

D'où l'initialisation est établie

Hérédité: Supposons que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ fixe

on ait $A^n = P B^n P^{-1}$. On calcule alors $A^{n+1} = A^n A$

Soit $A^{n+1} = P B^n P^{-1} A$ par hypothèse de récurrence

$$= P B^n P^{-1} P B P^{-1} \text{ par la remarque initiale}$$

$$= P B^n B P^{-1} = P B^{n+1} P^{-1} \text{ ce qui atteste de}$$

l'hérédité.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P B^n P^{-1}$

d) Nous connaissons $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$ et $P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d'où, par simple calcul: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1}+2^n-2 & 1-2^n \\ 4-2^{n+1}-2^n & 2^n-2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n(2+1)-2 & 1-2^n \\ 4-2^n(2+1)+2^n(2+1)-2 & 1-2^n+2-2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & 1 - 2^n \\ 2 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix} ; \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Exercice II

Preliminaires

1° Notons R : "la boule tirée est rouge"
 U : "la boule tirée porte le numéro un"

L'énoncé indique que $\bar{U}$ correspond aux boules portant le numéro 2 et $\bar{R}$ aux boules vertes.

Traduisons l'énoncé :

$$\begin{cases} P(R \cap U) = 20\% = \frac{1}{5} & (1) \\ P_{\bar{U} \cap R}(R) = 10\% = \frac{1}{10} & (2) \\ \overline{R \cap U} = \bar{U} & (3) \end{cases}$$

On a donc $\bar{U} = \bar{R} \cup \bar{U}$ et $U \subset R$ s'en suit.
Notons en particulier que $P[R \cap U] = \frac{1}{5}$ repend.

2° Calculons $P[\bar{U}] = 1 - P(U) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$

3° Enfin, $R = (R \cap U) \cup (R \cap \bar{U})$ [union disjointe]

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(R) &= P(R \cap U) + P(R \cap \bar{U}) \\ &= P(R \cap U) + P(\bar{U}) \cdot P_{\bar{U}}(R) \\ &= P(R \cap U) + P(\bar{U}) \cdot P_{\bar{U} \cap R}(R) \text{ par (2)} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0,28 \end{aligned}$$

Première Expérience

1° Tirer une boule et chercher à obtenir une rouge.

Constitue une épreuve de Bernoulli.

En répétant, avec remise, de tels tirages, on peut

Considérer que l'on construit un processus de Bernoulli.

Le rang d'apparition du premier succès de ce schéma suit

une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p = P[R] = 0.25$

par le cours : $E[X] = \frac{1}{p} = \frac{25}{7}$

et $V[X] = \frac{1-p}{p^2} = \left(\frac{25}{7}\right)^2 \times \frac{18}{25} = \frac{450}{7^2} = \frac{450}{49}$

a) $T(\Omega) = \mathbb{N}$ puisque l'on tire un nombre entier de boules "2"

2° b) Un raisonnement similaire s'applique en remplaçant "rouge"

par "numéro 1". Chaque boule portant le numéro 2 tirée

correspond alors à un échec. Or, $P(\bar{U}) = 1 - P(U) = 0.8 = \frac{4}{5}$

d'où, par indépendance des tirages :

$$P[T=n] = P(\bar{U}_1)P(\bar{U}_2) \dots P(\bar{U}_n) \cdot P[U_{n+1}]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{1}{5} = \frac{4^n}{5^{n+1}} \text{ si l'on note assez}$$

Généraliser E_k : obtenir l'événement E lors de la $k^{\text{ième}}$ épreuve de Bernoulli au sein du processus.

5) Comme T désigne le nombre d'échecs d'un processus de Bernoulli aboutissant au 1^{er} tirage réussi, on a $T+1$ qui donne le rang d'apparition du 1^{er} succès.

De même qu'en 1° on a $T+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$ où $\frac{1}{5} = P(U)$

et aussi $T+1$ admet une espérance et $E[T+1] = \frac{1}{1/5} = 5$

par linéarité de E et comme $E(1) = 1$ on obtient
 $E[T+1] = E[T] + 1 = 5 \Rightarrow E[T] = 4$
 et son existence est assurée.

e) Comme $T+1 \hookrightarrow g(1/s)$ on a $V[T+1]$ existe
 et vaut $V[T+1] = \frac{1-1/s}{(1/s)^2} = 2s \times \frac{1}{s} = 20$

Or $V[T+a] = V[T]$ pour toute constante $a \in \mathbb{R}$
 donc $V[T]$ existe et vaut $V[T+1] = 20$

3° Continuons par nous demander si, pour un unique
 tirage donné, R et U sont indépendants :

$P(R) = 0,28$ or $P(U) = \frac{1}{5}$ donc $P(R)P(U) = \frac{7}{125}$
 Or $P(R \cap U) = \frac{1}{5}$ donc R et U ne sont pas indépendants
 par propriété, R et $\bar{U}$ non plus ($\bar{U}$: "obtenir une balle n°2")

Ainsi, $[X=1]$ et $[T=0]$ correspondant respectivement à
 "obtenir Rouge au 1^{er} tirage" et "obtenir 1 au premier tirage"

On a $P[X=1] = P(R)$ or $P[T=0] = P(U)$
 Les événements $[X=1]$ et $[T=0]$ ne sont donc pas
 indépendants et il n'en suit que les variables aléatoires
 X et T ne peuvent donc l'être.

Accord

1° a) On écrit, en montrant $G(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$

$$[G = -1] = \bar{R} \Rightarrow P[G = -1] = 0,72 = \frac{18}{25}$$

$$[G = 1] = R \cap U \Rightarrow P[G = 1] = 0,2 = \frac{5}{25}$$

$$[G = 2] = R \cap \bar{U} \Rightarrow P[G = 2] = 0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

En effet: $P(R) = P(R \cap U) + P(R \cap \bar{U})$ [(U, $\bar{U}$) or SCE]
 $\Rightarrow P[R \cap \bar{U}] = P(R) - P(R \cap U) = 0,28 - 0,20$

On résume ainsi la loi de G:

$g =$	-1	1	2	Σ
$P[G = g]$	$18/25$	$5/25$	$2/25$	1
$g P[G = g]$	$-18/25$	$5/25$	$4/25$	$-9/25 = E[G]$
g^2	1	1	4	inutile
$g^2 P[G = g]$	$18/25$	$5/25$	$8/25$	$31/25 = E[G^2]$

b) On rappelle $E[G] = \sum_{g \in G(\Omega)} g P[G = g] = -9/25$

$E[G^2] = \sum_{g \in G(\Omega)} g^2 P[G = g]$ par théorème de transfert

et, ayant complété le tableau de loi on peut lire les valeurs résultantes.

Par la formule de Koenig - Huygens on a:

$$\begin{aligned} V[G] &= E[G^2] - E[G]^2 \\ &= \frac{31}{25} - \left(-\frac{9}{25}\right)^2 = \frac{1}{25} \left(\frac{31 \times 25}{25} - \frac{81}{25} \right) \\ &= \frac{1}{25} \times (3100 - 324) / 100 = \frac{2776}{2500} \approx 1,11 \end{aligned}$$

- a) Tirer une boule au hasard de cette urne et chercher à obtenir, selon nos considérations, une boule rouge (R) ou resp. numérotée un (U) ou resp. verte (V) ou resp. numérotée deux (D)

Consiste en une épreuve de Bernoulli

En répétant avec remise cette épreuve n fois ($n \geq 1$) on peut considérer que l'on obtient un processus de Bernoulli fini.

Le nombre R_n de succès de type "R" suit la loi Binomiale avec pour paramètres : n et $P_R = P(R) = 0,28$

Respectivement : le nombre U_n de succès de type "U" suit la loi $B(n; 1/5)$

le nombre V_n de succès de type "V" suit la loi $B(n; 0,72)$

le nombre D_n de succès de type "D" suit la loi $B(n; 1/5)$

On en donne les espérances respectives :

$$E[U_n] = \frac{n}{5} ; E[D_n] = \frac{4n}{5}$$

$$E[R_n] = 0,28n = \frac{7n}{25} \text{ et } E[V_n] = \frac{18n}{25}$$

- a) Tirer une boule au hasard de cette urne et chercher à obtenir, selon nos considérations, une boule rouge (R) ou resp. numérotée un (U)
ou resp. verte (V)
ou resp. numérotée deux (D)

Consiste en une épreuve de Bernoulli

En répétant avec remise cette épreuve n fois ($n \geq 1$)
On peut considérer que l'on obtient un processus de Bernoulli fini.

Le nombre R_n de succès de type "R" suit la loi Binomiale avec pour paramètres : n et $P_R = P(R) = 0,28$

Respectivement :

- le nombre U_n de succès de type "U" suit la loi $B(n; 1/5)$
- le nombre V_n de succès de type "V" suit la loi $B(n; 0,72)$
- le nombre D_n de succès de type "D" suit la loi $B(n; 1/5)$

On en donne les espérances respectives :

$$E[U_n] = \frac{n}{5} ; E[D_n] = \frac{4n}{5}$$

$$E[R_n] = 0,28n = \frac{7n}{25} \text{ et } E[V_n] = \frac{18n}{25}$$

b) Par constitution de l'urne on a $n + V_n = 12$
 (chaque boule est soit verte, soit rouge et pas les deux)
 R_n et V_n ne sont donc pas indépendantes :

$$R_n(\Omega) = V_n(\Omega) = \mathbb{I}[0, n] \text{ avec } P[R_n=0] \neq 0 \\ P[V_n=0] \neq 0$$

mais $P([R_n=0] \cap [V_n=0]) = 0$.

Calculons $\text{Cov}(R_n; V_n) = \text{Cov}(R_n; n - R_n)$
 $= \text{Cov}(R_n; n) - \text{Cov}(R_n; R_n)$
 $\Rightarrow \text{Cov}(R_n; V_n) = -V[R_n] = -0,28 \times 0,72n = -\frac{126}{625}n$

(on a $\text{Cov}(R_n; n) = 0$ car n est certaine)

c) On a $U_n + D_n = n$ de jagers analogue à b)
 et donc U_n et D_n ne sont pas indépendantes et
 on obtient $\text{Cov}(U_n; D_n) = -V[U_n] = -\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}n = -\frac{4}{25}n$

d) La lecture des conditions de cumul de gains
 se traduisent par $G_n = -V_n + U_n + 2(n - V_n - U_n)$
 (-2 par verte; +1 par "1" et +2 pour tout autre cas)
 avec $U_n R = U$

On utilise les relations déjà établies :

$$G_n = U_n - V_n + 2n - 2V_n - 2U_n \\ = U_n - V_n - 2V_n + 2n - 2U_n \\ = U_n - 3V_n + 2(n - U_n) = U_n - 3V_n + 2D_n$$

Par linéarité de $\mathbb{E}$ on en tire :

$$\mathbb{E}[G_n] = \mathbb{E}(U_n) + 2\mathbb{E}(D_n) - 3\mathbb{E}[V_n]$$

$$= \frac{n}{5} + \frac{8n}{5} - \frac{54n}{25} = \frac{1}{25} (5n + 40n - 54n)$$

$$= -\frac{9}{25}n \quad \text{et ce, pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

3° (a) si $A > 0,2$ avec A défini par rd. random() alors

$$A \in]0,2; 1[\Rightarrow A - 0,2 \in]0,8[$$

$$\Rightarrow \frac{A - 0,2}{0,8} \in]0,1[$$

or $0,8 = \frac{4}{5} = \mathbb{P}(\overline{R \cap U})$ et $\mathbb{P}(R \cap U) = 0,2$ donc on cherche à reconstruire A comme valeur tirée au hasard sachant $\overline{R \cap U}$.
L'énoncé fournissant des proportions de Boules parmi les boules de numéros 2 on pourra tester les cas suivants au moyen de probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}_{\overline{R \cap U}}(R) = \frac{1}{10} = 0,1$ par exemple.

(b) from math import *

import numpy.random as rd

n = int(input("nombre de parties : "))

G = 0

for k in range(n):

A = rd.random()

if A <= 0.2 :

G = G + 1

else :

A = (A - 0.2) / 0.8

if A <= 0.1

G = G + 2

else :

G = G - 1

print("votre gain total : ", G)

c) $M = G/n$

ajout print("votre gain moyen est ", M)

$$d) \mathbb{E}(G_n) = -\frac{9}{25}n \Rightarrow \mathbb{E}[G_{1200}] = -\frac{9 \times 1200}{25} = -432$$

La valeur -417 semble assez cohérente au regard de 1200
essais pour une opération de -432

Exercice 3

1/ (a) g est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme
où $t \mapsto t+1$ vérifie $\forall t \geq 0, t+1 \geq 1$ et $\ln$ est
bien définie (dérivable) sur $[1; +\infty[$.

On calcule: $g'(t) = \ln(1+t) + (1+t) \cdot \frac{1}{1+t} - 1 = \ln(1+t)$

b) on calcule $2_1 = \int_0^1 \ln(1+t) dt = \int_0^1 g'(t) dt = [g(t)]_0^1$
 $= g(1) - g(0) = 2\ln 2 - 1 - 0 = 2\ln 2 - 1$

2/ a) f est dérivable sur $[0; 1]$ ayant $1+t \geq 1$
et $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ de nouveau dérivable ($t+1 \neq 0$ si $t \geq 0$)

avec $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ où $t \in [0; 1]$

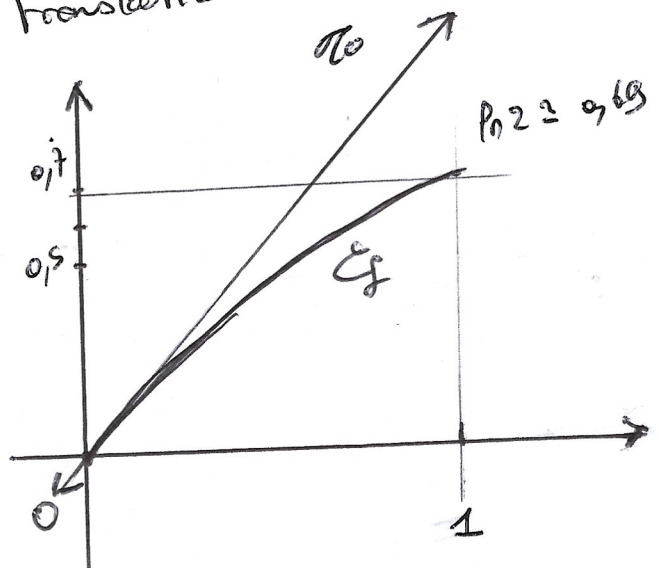
On observera que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; 1]$

b) on a $f'(t) = \frac{1}{1+t} > 0$ pour $t \in [0; 1]$

Donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$ par le
principe de Lagrange. Comme $\ln$ est une fonction de
référence et que $t \mapsto t+1$ est une translation d'une unité, la

courbe s'obtient directement:

c) $f''(t) < 0$ ou f' décroît
permettent, l'un comme l'autre
d'établir que f est concave
sur $[0; 1]$



$T_0: y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$

3/a) f est croissante sur $[0;1]$ donc :

$$\forall t \in [0;1] \quad f(0) \leq f(t) \leq f(1)$$

$$\text{Soit } \forall t \in [0;1] \quad f_n 1 \leq f_n(t+1) \leq f_n(1+1)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f_n(1+t) \leq f_n 2$$

b) Comme $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0;1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé (même) on a :

$$\forall t \in [0;1] \quad 0 \leq (\ln(1+t))^n \leq (f_n 2)^n$$

a) partir de 3/a) : Donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 \, dt \leq \int_0^1 (f_n(1+t))^n \, dt \leq \int_0^1 (f_n 2)^n \, dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq (f_n 2)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

c) Comme $|\ln 2| \approx 0.69 < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n 2)^n = 0$ et aussi, par Théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

4/a) on procède à une IPP en posant :

$$h(t) = (f_n(1+t))^{n+1} \Rightarrow h'(t) = (n+1) \cdot \frac{1}{t+1} \cdot (\ln(1+t))^n$$

$$k'(t) = 1 \quad \text{avec} \quad k(t) = t+1 \quad (\text{choix aussi})$$

h et k sont de classe C^1 sur $[0;1]$ avec :

$$\int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} \, dt = \left[(t+1)(f_n(1+t))^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (t+1) \frac{n+1}{t+1} (\ln(1+t))^n \, dt$$

$$= \left[2(f_n 2)^{n+1} - 0 \right] - (n+1) \int_0^1 (f_n(1+t))^n \, dt$$

(par l'induite')

$$U_{n+1} = 2(f_n 2)^{n+1} - (n+1) U_n$$

Ce qui se réécrit

(b) D'après 3°/b) on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} \geq 0$ et, par 4°/a) :

$$2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \geq 0 \rightarrow 2(\ln 2)^{n+1} \geq (n+1)u_n$$

Il ne reste qu'à vérifier le cas $n=0$: Comme $u_0 = 1$

On a $(0+1)u_0 = u_0$ et $2(\ln 2)^{0+1} = 2\ln 2 \approx 2 \times 0,69$

On peut donc écrire $u_0 = 1 < 1,3 < 2\ln 2$

et conclure $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$

(c) ayant, pour $t \in [0;1]$ j'exé, $0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$

On a que $(\ln(1+t)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique

de raison $q = \ln(1+t) \in [0;1]$ donc décroissante

ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0;1] \quad 0 \leq (\ln(1+t))^{n+1} \leq (\ln(1+t))^n$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt \leq \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$$

et ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$ par croissance de l'intégrale ce qui atteste de

la décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(d) par 4°/c) on a $u_n \geq u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$ par 4°/a)

et ainsi : $u_n + (n+1)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Soit} \quad (n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$$

c) Synthétisons 4/ a) b) b):

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)U_n \leq 2(\ln 2)^{n+1} \leq (n+2)U_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} \leq 1 \leq \frac{(n+2)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = \frac{(n+1)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} + \frac{U_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \quad \text{par 3/c) donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 0$$

On peut alors écrire l'encadrement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - \frac{U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} \leq \frac{(n+1)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} \leq \underbrace{\frac{(n+1)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}}}_{\text{inutile}} = 1$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 1 - 0 = 1 \quad \text{par ce qui précède}$$

d'où, par le théorème d'encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 1$

$$\text{De nouveau: } \frac{(n+1)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = \frac{nU_n}{2(\ln 2)^{n+1}} + \frac{U_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nU_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} - \frac{U_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Conduisant à } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nU_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 1$$

Exercice IV

19 (a) On considère l'équiprobabilité des tirages au sein de l'urne: $P(B_1) = \frac{1}{3}$ et $P(R_1) = \frac{2}{3}$

(b) Comme $(B_1; R_1)$ forme un système complet d'événements, on a, par la formule des probabilités totales: $P(B_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) + P(R_1) \cdot P_{R_1}(B_2)$
$$= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Comme, à l'issue de la relaxation de B_1 , l'urne ne contient que des boules rouges ($P_{B_1}(B_2) = 0$) et que l'on remplace une boule rouge, lorsque tirée, par une bleue ($P_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3}$)

$(B_2; R_2)$ est aussi un système complet d'événements
donc $R_2 = \overline{B_2} \Rightarrow P(R_2) = 1 - P(B_2) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

(c) On cherche donc à calculer $P_{B_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(B_2)}$
$$\Rightarrow P_{B_2}(R_1) = \frac{P(R_1) \cdot P_{R_1}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = 1$$

Ce que l'on pourrait tout aussi bien expliquer:
Si l'on avait tiré une boule bleue au 1er tirage, l'urne n'aurait ensuite contenu que des rouges: il eût alors été impossible de constater que le 2nd tirage amenait une boule bleue: $B_1 \text{ réalisée} \Rightarrow \overline{B_2} \text{ réalisée}$
par contraposition: $B_2 \text{ réalisée} \Rightarrow \overline{B_1} = R_1 \text{ réalisée}$

2/ a) On a placé 2 boules rouges initialement.
On tire qu'une boule à la fois : $Y_1(\Omega) = \{1, 2\}$

$$b) P[Y_1 = 1] = P(R_1) = \frac{2}{3}$$

$$P[Y_1 = 2] = P(B_1) = \frac{1}{3} \text{ par 1/a)}$$

$$c) \text{ On calcule } E[Y_1] = 1 \cdot P[Y_1 = 1] + 2 \cdot P[Y_1 = 2] \\ = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

3/ (a) Au départ, on a placé 2 boules rouges.
À chaque tirage, l'urne peut perdre une boule rouge mais il n'est pas possible d'en rajouter.

$$\text{Donc } Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

(b) $[Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 1]$ signifie que l'on tire, en 1^{re} séquence, l'unique boule bleue. Le second tirage retire nécessairement une boule rouge qui sera remplacée par une bleue.

$$\text{Donc } P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 1]) = P[Y_1 = 2] = \frac{1}{3}$$

(c) L'événement $[Y_1 = 1]$ correspond à R_1 .

$$\text{Ainsi } [Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1] = R_1 \cap B_2$$

$$\text{donc } P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) = P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) P_{R_1}(B_2) \\ = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

puisque l'urne contiendra pour la 2^{de} séquence 2 boules bleues et une boule rouge si R_1 est réalisée.

d) $Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega) = \{1, 2\} \times \{0, 1\}$ et $P([Y_1=2] \cap [Y_2=0]) = 0$
 par le principe (et les remarques effectuées) d'où l'on
 tire la table :

	$Y_2=0$	$Y_2=1$	Σ
$Y_1=1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
$Y_1=2$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Σ	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	1

L'unique valeur
 restant à calculer
 étant $\frac{2}{9}$ obtenue

en complétant la loi du couple : $\sum_{\substack{a \in Y_1(\Omega) \\ b \in Y_2(\Omega)}} P([Y_1=a] \cap [Y_2=b]) = 1$

4/a) ayant $([Y_1=1]; [Y_1=2])$ système complet
 d'événements, la formule des probabilités totales fournit :

$P[Y_2=b] = P([Y_1=1] \cap [Y_2=b]) + P([Y_2=b] \cap [Y_1=2])$
 pour chaque $b \in Y_2(\Omega) = \{0, 1\}$. Nous complétons
 directement la table.

$$\text{On calcule alors } E[Y_2] = 0 \cdot P[Y_2=0] + 1 \cdot P[Y_2=1] \\ = P[Y_2=1] = \frac{7}{9}$$

On peut remarquer que $Y_2 \hookrightarrow B(\frac{7}{9})$

$$\begin{aligned} \text{b) On calcule } E[Y_1 Y_2] &= \sum_{\substack{a \in \{1, 2\} \\ b \in \{0, 1\}}} ab P([Y_1=a] \cap [Y_2=b]) \\ &= \sum_{a=1}^2 a P([Y_1=a] \cap [Y_2=1]) \\ &= P([Y_1=1] \cap [Y_2=1]) + 2P([Y_1=2] \cap [Y_2=1]) \\ &= \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

c) On calcule $\text{Cov}(Y_1; Y_2) = E[Y_1 Y_2] - E[Y_1] E[Y_2]$
 par la formule de Huygens.

Ce qui donne : $\text{Cov}(Y_1; Y_2) = \frac{10}{9} - \frac{4}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{30-28}{27} = \frac{2}{27}$

D'après les résultats obtenus dans les questions qui précèdent

Comme $\text{Cov}(Y_1; Y_2) \neq 0$ on en déduit que Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes.

```
59 a) from math import *  
import numpy as np  
import numpy.random() as rd  
r = 2  
b = 1  
for k in range(2):
```

```
    if rd.random() < r/(r+b) # boule rouge  
        r = r - 1  
        b = b + 1
```

```
    else:  
        b = b - 1
```

```
print(r)
```

b) la variable b représente alors le nombre de boules bleues (à un instant donné)

c) Comme ce programme simule deux séquences de jeu et que r est affiché à l'issue de ces séquences, étant le nombre de boules rouges, on peut considérer que r renvoie une réalisation de Y_2