.

Variables Aléatoires à densité

Exercice $\boxed{9}$ 1. Nous vérifions les conditions attendues pour une densité de probabilité :

- Positivité : La fonction $x \mapsto \dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{9}x$ est affine décroissante donc, sur $[1;4]$, son minimum est atteint en $x = 4$ et il vaut $\dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{9} \times 4 = 0 \geq 0$. On en déduit $\forall x \in [1;4] \;\; h(x) \geq 0$.
  Or, en dehors, la fonction h est nulle donc positive (au sens large). On obtient la positivité de h sur $\mathbb{R}$.
- Continuité (presque partout) : Sur $]1;4[$, nous venons de voir que h est affine donc continue.
  Sur $]-\infty;1[$ et sur $]4;+\infty[$ la fonction h est nulle donc continue.
  En conclusion, h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en $x = 1$ et en $x = 4$ (nombre fini de points).
- Convergence de l'intégrale : Nous venons de voir que h est nulle sur $]-\infty;1[$ et nulle sur $]4;+\infty[$ donc, les intégrales suivantes convergent (sont nulles) :

$$\int_{-\infty}^{1} h(x)\ \mathrm{d}x = \int_{4}^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

  Sur $[1;4]$ on peut calculer :

$$\int_{1}^{4} h(x)\ \mathrm{d}x = \int_{1}^{4} \left(\frac{8}{9} - \frac{2}{9}x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{8}{9}x - \frac{1}{9}x^2\right]_1^4 = \frac{32}{9} - \frac{16}{9} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{16-7}{9} = 1$$

  La relation de Chasles permet de conclure à la convergence :

$$\int_{-\infty}^{1} h(x)\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{4} h(x)\ \mathrm{d}x + \int_{4}^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x$$

  Et le calcul des valeurs donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x = 0 + 1 + 0 = 1$.

Nous avons bien établi que h est une densité de probabilité.

remarque : On peut tirer de cette étude une expression de la fonction de répartition H de X :

$$\forall x \in [1;4] \quad H(x) = \int_{1}^{x} h(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{8}{9}t - \frac{1}{9}t^2\right]_1^x = \frac{1}{9}\left(8x - x^2 - 7\right)$$

et compléter avec $H(x) = 0$ si $x < 1$ et $H(x) = 1$ pour $x > 4$.

2. X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x$ convergence absolument.

   Or, par l'étude menée en question 1° cette étude se ramène à celle de $\displaystyle\int_{1}^{4} xh(x)\ \mathrm{d}x$ (nullité en dehors) qui est bien définie comme intégrale sur un segment d'un produit de fonctions affines continues. On peut calculer :

$$\int_{1}^{4} xh(x)\ \mathrm{d}x = \int_{1}^{4} \left(\frac{8}{9}x - \frac{2}{9}x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{27}x^3\right]_1^4 = \frac{64}{9} - \frac{128}{27} - \frac{4}{9} + \frac{2}{27} = \frac{60}{9} - \frac{126}{27} = \frac{60}{9} - \frac{42}{9} = 2$$

3. On a donc $Y = X^2$. On peut remarquer immédiatement que $\mathbb{P}[Y \in \mathbb{R}_-^*] = 0$ pour la suite.
   (a) Comme $Y^2 = X$ et que la densité de X est nulle sur $]-\infty;1[$ donc aussi sur $\mathbb{R}_-$ on en déduit que $\mathbb{P}[X \leq 0] = 0$. Ainsi, pour $x \geq 1$ on a :

$$\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[1 \leq X^2 \leq x] = \mathbb{P}\left([-\sqrt{x} \leq X \leq -1] \cup [1 \leq X \leq \sqrt{x}]\right) = 0 + \mathbb{P}[0 \leq X \leq \sqrt{x}]$$

par additivité des probabilités d'événements incompatibles.
Enfin, si $1 \leq x \leq 16$ alors $1 \leq \sqrt{x} \leq 4$ permettant de calculer :

$$\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[1 \leq X \leq \sqrt{x}] = \int_1^{\sqrt{x}} h(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{8}{9}t - \frac{1}{9}t^2\right]_1^{\sqrt{x}} = \frac{1}{9}\left(8\sqrt{x} - x - 7\right)$$

(b) D'après la remarque initiale, il suffit de vérifier que $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq 1] = 0$. Or :

$$0 \leq \mathbb{P}[0 \leq Y \leq 1] = \mathbb{P}[0 \leq X^2 \leq 1] = \mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1] \leq \mathbb{P}[X \leq 1] = \int_{-\infty}^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

comme étudié en question 1, et par positivité et croissance des probabilités. Il vient $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq 1] = 0$ et ainsi, pour tout $x \leq 1$ on retrouver bien $\mathbb{P}[Y \leq x] = 0$

(c) Il ne reste plus qu'à traiter le cas où $x > 16$ pour calculer $\mathbb{P}[Y \leq x] = \mathbb{P}[Y \leq 16] + \mathbb{P}[16 < Y \leq x]$. Or, on a :

$$\mathbb{P}[16 < Y \leq x] = \mathbb{P}[16 < X^2 \leq x] = \mathbb{P}[-\sqrt{x} \leq X < -4] + \mathbb{P}[4 < X \leq \sqrt{x}] = 0 + \mathbb{P}[4 < X \leq \sqrt{x}]$$

Et enfin, on a h nulle sur $]4; +\infty[$ et donc, $\mathbb{P}[4 \leq X \leq \sqrt{x}] = \displaystyle\int_4^{\sqrt{x}} h(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

En conclusion $\mathbb{P}[16 < Y \leq x] = 0$ dans ce dernier cas ($x > 16$) et ainsi $\mathbb{P}[Y \leq x] = \mathbb{P}[Y \leq 16] = 1$. Nous résumons :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{9}\left(8\sqrt{x} - x - 7\right) & \text{si } x \in [1; 16] \\ 0 & \text{si } x > 16 \end{cases}$$

(d) On peut retrouver une densité de Y en dérivant G, dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en $x = 1$ et en $x = 16$. On obtient $G'(x) = 0$ pour $x < 1$ ainsi que pour $x > 16$ et :

$$\forall x \in]1; 16[\quad G'(x) = \frac{1}{9}\left(8\sqrt{x} - x - 7\right)' = \frac{4}{9\sqrt{x}} - \frac{1}{9}$$

La fonction définie par $g(x) = \dfrac{4}{9\sqrt{x}} - \dfrac{1}{9}$ si $x \in [1; 16]$, et $g(x) = 0$ sinon convient donc, quitte à faire une vérification analogue à h.

On remarquera rapidement que $\displaystyle\int_1^{16} g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_1^{16} = G(16) - G(1) = 1$ *afin de vérifier au plus vite*

(e) Comme $Y = X^2$ a une densité nulle sur $] - \infty; 1[$ et sur $]16; +\infty[$ nous n'avons aucun mal à réduire l'étude de convergence requise à celle de $\displaystyle\int_1^{16} xg(x)\,\mathrm{d}x$ qui ne pose pas de problème :

$$\int_1^{16} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{16} x\left(\frac{4}{9\sqrt{x}} - \frac{1}{9}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_1^{16}\left(4\sqrt{x} - x\right)\,\mathrm{d}x$$

ayant utilisé la linéarité de l'intégrale. La convergence est alors acquise (intégrale d'une fonction continue, bien définie, sur un intervalle fermé et borné) et ainsi le calcul donne :

$$\mathbb{E}[X] = \int_1^{16} xg(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_1^{16}\left(4\sqrt{x} - x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left[4 \times \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right]_1^{16} = \frac{1}{9} \times \frac{81}{2} = \frac{9}{2}$$

4. La variable aléatoire X admet une espérance et X^2 admet aussi une espérance, donc par la formule de Koenig-Huygens on a :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{9}{2} - 2^2 = \frac{1}{2}$$

et finalement on trouvera $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour écart-type.