

Interrogation $I_8(A)$

Exercice I : Matrice Autonome

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer un polynôme annulateur de A .
- La matrice A admet-elle des valeurs propres (réelles)? Justifier
- La matrice A est-elle inversible? Justifier.

Exercice II : Matrice Guidée

On donne $Q = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & \frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

- Justifier que U est un vecteur propre de la matrice Q . A quelle valeur propre ce vecteur est-il associé?
- Un polynôme annulateur de Q est $P(X) = X^3 - 5X^2 - 12X + 36$. Déterminer les racines de P et en déduire les valeurs propres potentielles de Q .
- Déterminer une solution non nulle de $QX = 2X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Déterminer une solution non nulle de $QX = -3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Finalement, quelles sont les valeurs propres de la matrice Q ?

Exercice III : Simulation Python

On considère une variable aléatoire M dont la loi (discrète) est donnée par le tableau suivant :

| | | | |
|------------------|-----|-----|-----|
| valeur | -4 | 0 | + 6 |
| probabilité | 0.6 | 0.3 | 0.1 |
| fonction F_M : | | | |

- Compléter la dernière ligne du tableau (c'est F_M , la fonction de répartition de M en quelques valeurs pertinentes)
- Déterminer la valeur de $\mathbb{E}[M]$.
- Compléter le programme suivant pour qu'il simule une réalisation de G :

```
def Mtick():
    U=rd.random()
    if U<= .....:
        M=-4
    else :
        .....
    .
    .
    .
    return (M)
```

- Compléter le script suivant pour qu'il renvoie la moyenne empirique de n réalisations successives de la variable M :

```
def empirmeanM(n):
    Y=0
    for k in range(n):
        Y = .....
    Y=Y/n
    return (Y)
```

Interrogation $I_8(B)$

Exercice I : Matrice Autonome

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer un polynôme annulateur de B .
- La matrice B admet-elle des valeurs propres (réelles)? Justifier
- La matrice B est-elle inversible? Justifier.

Exercice II : Matrice Guidée

On donne $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

- Justifier que V est un vecteur propre de la matrice P . A quelle valeur propre ce vecteur est-il associé?
- Un polynôme annulateur de P est $Q(X) = X^3 - \frac{15}{2}X^2 + 15X - 36$. Quelles sont alors toutes les valeurs propres de la matrice P ?
- Etablir que P est inversible puis exprimer son inverse P^{-1} .
Indication : on pourra utiliser le polynôme Q
- Démontrer que P n'est pas diagonalisable.

Exercice III : Simulation Python

On considère une variable aléatoire G dont la loi (discrète) est donnée par le tableau suivant :

| | | | |
|------------------|-----|-----|-----|
| valeur | -2 | 0 | +8 |
| probabilité | 0.7 | 0.2 | 0.1 |
| fonction F_G : | | | |

- Compléter la dernière ligne du tableau (c'est F_G , la fonction de répartition de G en quelques valeurs pertinentes)
- Déterminer la valeur de $\mathbb{E}[G]$.
- Compléter le programme suivant pour qu'il simule une réalisation de G :

```
def Gtick():
    U=rd.random()
    if U<= .....:
        G=-2
    else :
        .....
.
.
.
return (G)
```

- Compléter le script suivant pour qu'il renvoie la moyenne empirique de n réalisations successives de la variable G :

```
def empirmeanG(n):
    X=0
    for k in range(n):
        X = .....
    X=X/n
    return (X)
```