

# Interrogation $I_8(A)$

## Exercice I : Matrice Autonome

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer un polynôme annulateur de  $A$ .
- La matrice  $A$  admet-elle des valeurs propres (réelles)? Justifier
- La matrice  $A$  est-elle inversible? Justifier.

## Exercice II : Matrice Guidée

On donne  $Q = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & \frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix}$  et  $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

- Justifier que  $U$  est un vecteur propre de la matrice  $Q$ . A quelle valeur propre ce vecteur est-il associé?
- Un polynôme annulateur de  $Q$  est  $P(X) = X^3 - 5X^2 - 12X + 36$ . Déterminer les racines de  $P$  et en déduire les valeurs propres potentielles de  $Q$ .
- Déterminer une solution non nulle de  $QX = 2X$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .
- Déterminer une solution non nulle de  $QX = -3X$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .
- Finalement, quelles sont les valeurs propres de la matrice  $Q$ ?

## Exercice III : Simulation Python

On considère une variable aléatoire  $M$  dont la loi (discrète) est donnée par le tableau suivant :

valeur	-4	0	+ 6
probabilité	0.6	0.3	0.1
fonction $F_M$ :			

- Compléter la dernière ligne du tableau (c'est  $F_M$ , la fonction de répartition de  $M$  en quelques valeurs pertinentes)
- Déterminer la valeur de  $\mathbb{E}[M]$ .
- Compléter le programme suivant pour qu'il simule une réalisation de  $G$  :

```
def Mtick():
    U=rd.random()
    if U<= .....:
        M=-4
    else :
        .....
.
.
.
return (M)
```

- Compléter le script suivant pour qu'il renvoie la moyenne empirique de  $n$  réalisations successives de la variable  $M$  :

```
def empirmeanM(n):
    Y=0
    for k in range(n):
        Y = .....
    Y=Y/n
    return (Y)
```

# Interrogation $I_8(B)$

## Exercice I : Matrice Autonome

On considère la matrice  $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer un polynôme annulateur de  $B$ .
- La matrice  $B$  admet-elle des valeurs propres (réelles)? Justifier
- La matrice  $B$  est-elle inversible? Justifier.

## Exercice II : Matrice Guidée

On donne  $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

- Justifier que  $V$  est un vecteur propre de la matrice  $P$ . A quelle valeur propre ce vecteur est-il associé?
- Un polynôme annulateur de  $P$  est  $Q(X) = X^3 - \frac{15}{2}X^2 + 15X - 36$ . Quelles sont alors toutes les valeurs propres de la matrice  $P$ ?
- Etablir que  $P$  est inversible puis exprimer son inverse  $P^{-1}$ .  
*Indication : on pourra utiliser le polynôme  $Q$*
- Démontrer que  $P$  n'est pas diagonalisable.

## Exercice III : Simulation Python

On considère une variable aléatoire  $G$  dont la loi (discrète) est donnée par le tableau suivant :

valeur	-2	0	+8
probabilité	0.7	0.2	0.1
fonction $F_G$ :			

- Compléter la dernière ligne du tableau (c'est  $F_G$ , la fonction de répartition de  $G$  en quelques valeurs pertinentes)
- Déterminer la valeur de  $\mathbb{E}[G]$ .
- Compléter le programme suivant pour qu'il simule une réalisation de  $G$  :

```
def Gtick():
    U=rd.random()
    if U<= .....:
        G=-2
    else :
        .....
.
.
.
return (G)
```

- Compléter le script suivant pour qu'il renvoie la moyenne empirique de  $n$  réalisations successives de la variable  $G$  :

```
def empirmeanG(n):
    X=0
    for k in range(n):
        X = .....
    X=X/n
    return (X)
```