.

Couples de VAR

Nous proposons ici une introduction au formalisme des couples de VAR, en lien avec les notions déjà connues.

Une reformulation de notions connues

Soient X et Y deux VAR définies sur un même espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. La notation $(X;Y)$ est employée pour désigner le *couple* de VAR induit par X puis Y et l'on peut simplement écrire que :

$$[(X;Y)=(x;y)] \;=\; [X=x]\cap[Y=y]$$

Toutes les autres notations usuelles se transmettent via l'intersection d'événements, de façon très générale on a alors :

$$(X;Y)\in A\times B \;=\; [X\in A]\cap[Y\in B]$$

Avec $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$. On en déduit *pour le cas discret* une écriture de la loi du couple $(X;Y)$ comme étant la donnée des probabilités élémentaires :

$$\text{loi de } (X;Y) : \quad \left(\mathbb{P}[(X;Y)=(x;y)]\right)_{\substack{x\,\in\,X(\Omega)\\ y\,\in\,Y(\Omega)}} \;=\; \left(\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])\right)_{\substack{x\,\in\,X(\Omega)\\ y\,\in\,Y(\Omega)}}$$

On peut alors résumer ces valeurs, dans le cas fini, à l'aide d'un tableau (et ainsi une matrice de loi est envisageable) en notant $p_{lk}=\mathbb{P}[(X;Y)=(x_l;y_k)]$ avec $X(\Omega)=\{x_1;\dots;\ x_m\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1;\dots;\ y_n\}$:

	y_1	$\dots$	y_k	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}		$\dots$		p_{1n}
$\vdots$		$\ddots$			
x_l	$\vdots$		p_{lk}		$\vdots$
$\vdots$				$\ddots$	
x_m	p_{m1}		$\dots$		p_{mn}

En particulier :

$$\sum_{(l;k)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]} p_{lk} \;=1$$

De plus, on peut observer que l'étude du couple $(X;Y)$ se transmet très naturellement à celle du couple $(Y;X)$.

Propriété : Dans le cas où X et Y sont discrètes, on a, pour tout $y\in Y(\Omega)$ fixé :

$$(*)\quad \mathbb{P}[Y=y]=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}[X=x]\times\mathbb{P}_{[X=x]}[Y=y]=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}[X=x]\times\mathbb{P}_{[X=x]}((X;Y)=(x;y))$$

On écrira un résultat analogue en intervertissant les rôles de X et de Y. On peut alors noter qu'on obtient la convergence des séries de la forme $\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}[X=x]\times\mathbb{P}_{[X=x]}[(X;Y)=(x;y)]$ et résultat analogue en intervertissant les rôles de X et Y.

Cas de la somme de VAR

Nous cherchons à exprimer l'événement "$X+Y$ *vaut* x_i+y_j *avec* x_i *obtenu pour* X *et* y_j *obtenu pour* Y" afin de démontrer la linéarité de $\mathbb{E}$.

Nous pensons avoir à écrire $[X+Y=x_i+y_j]$ par commodité mais ce n'est pas l'usage habituel : aussi surprenant que cela puisse paraître, l'événement cherché est en fait tout simplement $(X;Y)=(x_i;y_j)$. En effet :

- Supposons que $(X;Y)=(x_i;y_j)$ soit réalisé. Alors la seule valeur réelle possible pour $X+Y$ est bien x_i+y_j.
- Supposons que $X+Y$ vaille x_i+y_j, avec x_i obtenu pour X et y_j obtenu pour Y. En particulier, comme on a obtenu x_i pour X l'événement $[X=x_i]$ est réalisé. Mais il est donc de même pour $[Y=y_j]$ Donc $[X=x_i]\cap[Y=y_j]$ est réalisé. Mais nous avons introduit $[(X;Y)=(x_i;y_j)]$ comme nouvelle notation de cet (intersection d') événement.

Application : linéarité de $\mathbb{E}$ - *Démonstration non exigible*
La propriété de linéaire de la somme de deux variables aléatoires a en fait été énoncée en ECT-1 (conformément au programme officiel) et sa démonstration n'a pas été abordée.
Nous pouvons donc d'écrire l'espérance d'une somme ainsi :

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{(i;j)\in I\times J} (x_i+y_j)\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)]$$

avec $X(\Omega)=\{x_i\ ;\ i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j\ ;\ j\in J\}$. Finalement, la preuve s'écrit (sans peine sur le fond) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_{(i;j)\in I\times J} x_i\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] + y_j\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \ + \ \sum_{j\in J}\sum_{i\in J} y_j\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i\mathbb{P}[Y=y_j]\times\mathbb{P}_{[Y=y_j]}((X;Y)=(x_i;y_j)) \ + \ \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} y_j\mathbb{P}[X=x_i]\times\mathbb{P}_{[X=x_i]}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I} x_i\sum_{j\in J}\mathbb{P}[Y=y_j]\times\mathbb{P}_{[Y=y_j]}((X;Y)=(x_i;y_j)) \ + \ \sum_{j\in J} y_j\sum_{i\in I}\mathbb{P}[X=x_i]\times\mathbb{P}_{[X=x_i]}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I} x_i\mathbb{P}[X=x_i] \ + \ \sum_{j\in J} y_j\mathbb{P}[Y=y_j] \quad \text{d'après } (*) \\
&= \mathbb{E}[X] \ + \ \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

Notation : On écrira $[X+Y=s]$ avec $s\in\mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble $\{w\in\Omega \mid X(w)+Y(w)=s\}$.
De cette façon, l'événement est *indépendant* de la façon de décrire le réel s.

Ainsi, écrire $[X+Y=x_i+y_j]$ devient complètement désuet : en pratique, on calcule simplement $s=x_i+y_j$ et on s'intéresse à $[X+Y=s]$.
Dans le cas où l'on serait intéressé par l'obtention de la somme x_i+y_j amenée d'une façon spécifique par X et Y, on écrit simplement $[(X;Y)=(x;y)]$ comme vu précéde mment.

Bilan :
— Si l'on s'intéresse à une (ou plusieurs) façon précise d'obtenir une certaine somme, on étudie le *couple* $(X;Y)$
— Si l'on s'intéresse au résultat d'une somme, indépendamment de la façon dont les VAR l'ont réalisée, on étudie l'événement $[X+Y=s]$
— Dans tous les cas, on évite $[X+Y=x+y]$ comme ça, pas d'ambiguïté !

Exemple : Soient $X=D6$ et $Y=D4$ deux lancés indépendants de dés (équilibrés) à (respectivement) six et quatre faces.

1. On cherche la probabilité que la somme des dés amène 6 en ayant fait 4 sur l'un des dés. C'est un cas d'étude de couple :

   $$\mathbb{P}[(X;Y)\in\{(4;2)\ ;\ (2;4)\}] = \mathbb{P}[(X;Y)=(4;2)]+\mathbb{P}[(X;Y)=(2;4)] = \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=2])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=4]) = \frac{1}{12}$$

   On remarque que la valeur somme de 6 n'apparait nulle part au travers du calcul ($4+2=6$ est implicite)
2. On cherche la probabilité que la somme des dés amène 4 : c'est un cas d'étude de somme que l'on décompose en couples :

   $$\mathbb{P}[X+Y=4] = \mathbb{P}[(X;Y)=(1;3)]+\mathbb{P}[(X;Y)=(2;2)]+\mathbb{P}[(X;Y)=(3;1)] = \frac{1}{8}$$

   Les écritures de décomposition $1+3=4$, $2+2=4$ et $3+1=4$ sont alors implicitement contenues dans les couples.

Autres opérations : Les mêmes remarques s'appliquent à d'autres opérations comme, par exemple, le **produit**.
On peut donc définir $[XY=r]=\{w\in\Omega\ ;\ X(w)\times Y(w)=r\}$ pour calculer $\mathbb{P}[XY=r]$ et utiliser l'étude du couple $(X;Y)$ pour amener un produit particulier, lorsque la répartitions au sein des facteurs est connue. Nous utililserons ce type d'événements lors de l'étude de la covariance.