Lycée Turgot

$\boxed{\text{Corrigé } I_6 (K)}$

ECT-2
2024/2025

Sujet $I_6$ (A)

## Exercice I

on réécrit, avec $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$(3x)^n \cdot \frac{e^x}{n!} = e^x \cdot \frac{(3x)^n}{n!} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(3x)^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = e^{3x}$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = e^{3x} - 1$$

par linéarité, on a donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^x \frac{(3x)^n}{n!}$ qui converge avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^x \frac{(3x)^n}{n!} = e^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = e^x \cdot (e^{3x} - 1)$

## Exercice II : Afin de réaliser une IPP posons :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-2x} \text{ avec } v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array}\right\} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0;2]$$

et ainsi : $\displaystyle\int_0^2 (xe^{-2x})\,dx = \left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2x}\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^2 (xe^{-2x}+1)\,dx = \int_0^2 xe^{-2x}\,dx + \int_0^2 dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2 + 2$$

Soit alors : $\displaystyle\int_0^2 (xe^{-2x}+1)\,dx = \left[-e^{-4}+0\right] - \frac{1}{4}(e^{-4}-1) + 2$

$$= 2 + \frac{1}{4} + e^{-4}\left(-1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{5}{4}e^{-4}$$

## Exercice III

```
N = 5000
A = np.zeros([N])
for k in range(N):
    A[k] = rd.geometric(0.1)
Hist = plt.hist(A, range=(1,20), bins = 20)
```

## Exercice IV

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 9 & -3 \\ 8 & 16 & -4 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 20 & 9 & -3 \\ 8 & 16 & -4 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -3 & 0 \\ -4 & 16 & -4 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

# Sujet $I_6$ (B)

## Exercice I

On remarque que $\dfrac{2^n}{(2+p)^{n+1}} = \dfrac{1}{2+p}\left(\dfrac{2}{2+p}\right)^n$ et on a

$p>0 \Rightarrow p+2>2 \Rightarrow 1 > \dfrac{2}{2+p} > 0$

Soit $T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ où $q = \dfrac{p}{2+p} > 0$ et $q<1$

On calcule $1-q = \dfrac{2+p}{2+p} - \dfrac{p}{2+p} = \dfrac{2}{2+p}$

• On a aussi $\mathbb{E}[T] = \dfrac{1}{q}$ d'une part et :

$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} nq(1-q)^{n-1}$ d'autre part, la convergence étant assurée par l'existence (pour T) d'une espérance. Ainsi :

$\sum_{n=1}^{+\infty} nq(1-q)^{n-1} = \dfrac{1}{q} = \dfrac{2+p}{p} = 1+\dfrac{2}{p}$

par linéarité, on a alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{p}{2+p}\left(\dfrac{2}{2+p}\right)^{n-1} = 1+\dfrac{2}{p}$

$\Rightarrow p\left(\dfrac{2}{2+p}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{1}{2+p}\left(\dfrac{2}{2+p}\right)^{n-1} = \dfrac{2}{2+p}\left(1+\dfrac{2}{p}\right)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{1}{2+p}\left(\dfrac{2}{2+p}\right)^n = \dfrac{2}{2+p} \times \dfrac{p+2}{p^2} = \dfrac{2}{p^2}$

Soit finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{2^n}{(2+p)^{n+1}} = \dfrac{2}{p^2}$

## Exercice II

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x & \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 3x^2-1 & \text{avec } v(x) = x^3-x \end{cases}$

U et V sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ et ainsi, par IPP :

$$\int_1^2 (3x^2-1)\ln x\,dx = \left[(x^3-x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3-x}{x}\,dx$$
$$= (8-2)\ln 2 - 0 - \int_1^2 (x^2-1)\,dx$$
$$= 6\ln 2 - \left[x^3/3 - x\right]_1^2 = 6\ln 2 - \left(\tfrac{8}{3}-2\right)$$
$$= 6\ln 2 - \left[\left(\tfrac{8}{3}-2\right) - \left(\tfrac{1}{3}-1\right)\right]$$
$$= 6\ln 2 - \left[\tfrac{7}{3}-1\right] = 6\ln 2 - \tfrac{4}{3}$$

## Exercice III

```
N = 10 000
B = np.zeros([N])
for k in range(N):
    B[k] = rd.geometric(0.222)  # 2/9 passe !
Hist = plt.hist(B, range=(1,12), bins = 12)
plt.show()
```

## Exercice IV

Les calculs donnent $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

et $B^2 + 4B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 10 \\ 4 & 6 & -5 \\ -1 & -7 & 13 \end{pmatrix}$