Lycée Cuzzi   Corrigé $I_7(\mathcal{Q})$ ECT-2

2024/2025

avec $\mathcal{Q} = A$ on trouve :

Exercice I

On réécrit pour $k \geq 1$: $\dfrac{e^k}{(k+1)!} = e^{-1} \dfrac{e^{k+1}}{(k+1)!}$

Ainsi par décalage d'indices et linéarité :

$$e^{-1} \sum_{k\geq 2} \frac{e^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} e^{-1} \frac{e^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k \geq 1} \frac{e^k}{(k+1)!}$$

Or $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{e^k}{k!}$ CV comme série exponentielle $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{x^k}{k!}$ où $x = e$

donc $\sum_{k\geq 2} \dfrac{e^k}{k!}$ également et on a la convergence de $\sum_{k\geq 1} \dfrac{e^k}{(k+1)!}$

On en calcule la valeur :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{(k+1)!} = e^{-1} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^k}{k!} = e^{-1}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k!} - 1 - e\right]$$

$$= e^{-1}\left(e^e - 1 - e\right) = e^{e-1} - \frac{1}{e} - 1$$

Exercice II

1°/ On calcule $\sum_{(x;y)\in \llbracket 1;3\rrbracket\times\{-1;1\}} \mathbb{P}[(X;Y) = (x;y)]$ à partir des données du tableau :

$$\sum_{\substack{x\in\llbracket 1;3\rrbracket \\ y\in\{-1;1\}}} \mathbb{P}[(X;Y)=(x;y)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0$$

$$= \frac{1}{12}\left[3+2+1+4+2\right] = \frac{12}{12} = 1$$

Ainsi, $\mathbb{P}[(X;Y) \notin \{1;2;3\}\times\{-1;1\}] = 0$

et on peut donc considérer que $X(\Omega) = \{1;2;3\}$ et $Y(\Omega) = \{-1;1\}$

2°/ par 1°/ on a $([X=k])_{k\in\llbracket 1;3\rrbracket}$ système complet d'événements. Donc, par la formule des probabilités totales

On a : $\mathbb{P}[Y=-1] = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=-1])$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}[3+1+2] = \frac{1}{2}$$

De même $\mathbb{P}[Y=1] = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}([(X;Y) = (k;1)]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$

La même méthode s'applique pour la loi de X (marginale) et on résume à l'aide d'un tableau complété :

	$Y=-1$	$Y=1$	Σ
$X=1$	$1/4$	$1/6$	$5/12$
$X=2$	$1/12$	$1/3$	$5/12$
$X=3$	$1/6$	0	$1/6$
Σ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

3°/ on a X et Y finies

d'où : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{3} k\,\mathbb{P}[X=k]$

$$= 1\times\frac{5}{12} + 2\times\frac{5}{12} + 3\times\frac{1}{6} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

De même $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{P}[Y=-1] + \mathbb{P}[Y=1] = 0$

4°/ on lit $\mathbb{P}[X=3] \neq 0$; $\mathbb{P}[Y=1] \neq 0$ Mais $\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1]) = 0$

D'où X et Y ne sont pas indépendantes

Exercice IV

On a $x \geq 1$ fixé. On pose, en vue d'une IPP :

$u(t) = \ln(t+2) \Rightarrow u'(t) = \dfrac{1}{t+2}$ | de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$

$v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ avec $v(t) = -1/t$ | (fonctions de référence)

d'où : $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t+2)}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln(t+2)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t(t+2)}\,dt$.

ayant vérifié que $\frac{2}{t(t+2)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}$ si $t \geq 1$

On obtient : $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t+2)}{t^2}\,dt = \left(-\frac{\ln(x+2)}{x} + \ln 3\right) + \frac{1}{2}\int_1^x\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)dt$

$= \ln 3 - \frac{\ln(x+2)}{x} + \frac{1}{2}\Big[\ln t - \ln(t+2)\Big]_1^x$

$= \ln 3 - \frac{\ln(x+2)}{x} + \frac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+2) - \ln 1 + \ln 3\right)$

$= \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) - \frac{\ln(x+2)}{x}$ $\quad (x \geq 1)$

Cas où $\mathcal{G} = B$

Exercice I

Commençons par observer que pour $k \geq 1$ on a $\frac{k}{k!e^k} = \frac{e^{-k}}{(k-1)!}$

et $e^{-k} = e^{-1} \cdot e^{-(k-1)}$ d'où l'on réécrit :

$\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{k}{k!e^k} = \sum_{k\geq 1} e^{-1} \frac{e^{-(k-1)}}{(k-1)!} = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{e^{-k}}{k!}$ par linéarité et décalage d'indices

Or, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(e^{-1})^k}{k!}$ converge avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^{-1})^k}{k!} = e^{e^{-1}}$ (Série exponentielle)

Il vient que $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{k}{k!e^k}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k!e^k} = e^{-1}\cdot e^{e^{-1}}$

Exercice II

1/ Nous calculons, à partir des données fournies :

$\displaystyle\sum_{(u,v)\in[\![-1,+1]\!]\times\{1;2\}} P[(U,V) = (u,v)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\left(3+2+1+4+2\right)$

$= \frac{12}{12} = 1$

Donc $P[(U;V) \notin \{-1;0;1\}\times\{1;2\}] = 1 - 1 = 0$

On peut considérer que $U(\Omega) = [\![-1;1]\!]$ et $V(\Omega) = \{1;2\}$

2/ par 1/ on a $([U=k])_{k\in[\![-1;1]\!]}$ système complet d'événements d'où, par la formule des probabilités totales on a

$P[V = i] = \displaystyle\sum_{k\in\{-1;1\}} P([U=k]\cap[V=i])$ si $i \in \{1;2\}$

De même $P[U=j] = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} P([U=j]\cap[V=k])$ si $j\in\{-1;0;1\}$

On peut alors compléter le tableau de loi conjointe par les lois marginales :

	$V=1$	$V=2$	Σ
$U=-1$	$1/4$	$1/6$	$5/12$
$U=0$	$1/12$	$1/3$	$5/12$
$U=1$	0	$1/6$	$1/6$
Σ	$1/3$	$2/3$	1

3/ calculons, U et V étant finies :

$E[U] = \displaystyle\sum_{k\in\{-1;0;1\}} k P[U=k]$

$= -\frac{5}{12} + 0 + \frac{1}{6} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$

et $E[V] = \frac{1}{3} + 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

4/ on lit $P([U=1]\cap[V=1]) = 0$

Or $P[U=1] \neq 0$ et $P[V=1] \neq 0$ Donc U et V ne sont pas indépendantes

Exercice IV

Pour $x \geq 1$ donné, on va poser, en vue d'une IPP :

$u(t) = \ln(t+1) \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t+1}$

$v'(t) = \frac{t+1}{2}$ avec $v(t) = \frac{t^2+2t}{4}$

de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ comme fonctions de référence

On calcule donc : $\displaystyle\int_1^x \frac{t+1}{2}\ln(t+1)\,dt = \left[\frac{t^2+2t}{4}\ln(t+1)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2+2t}{4(t+1)}\,dt$

$= \frac{x^2+2x}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\displaystyle\int_1^x\left(\frac{t^2+t}{t+1} + \frac{t}{t+1}\right)dt$ [linéarité]

$= \frac{1}{4}(x^2+2x)\ln(x+1) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\displaystyle\int_1^x\left(t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \frac{x}{4}(x+2)\ln(x+1) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)\right]_1^x$

$= \frac{x}{4}(x+2)\ln(x+1) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) - \frac{1}{2} - 1 - \ln 2\right]$

$= \frac{x}{4}(x+2)\ln(x+1) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{\ln(x+1)}{4} + \frac{3}{8} + \frac{\ln 2}{4}$

$= \frac{x}{4}(x+2)\ln(x+1) - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{\ln(x+1)}{4} + \frac{3}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$