

Exercice 3

1° a) On peut considérer que l'échec journalier :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\} \text{ pour } S(\Omega) = \{0; 4\}$$

b) préparons les tableaux de somme et lois de couple :

	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(valeurs de S pour de X et Y)

Obtenir par indépendance de X et Y (Séance)

	0	1	2	3	4	Σ
$P[S=0]$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
Prob	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{40}{16}$

c) On peut compléter le tableau de loi de S

$$\text{et calculer } E[S] = \sum_{s=0}^4 s P[S=s] = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

2° a) un tableau des produits possibles donne

$$T(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$$

$$\begin{aligned} b) P[T=0] &= P[XY=0] = P[X=0 \cup Y=0] \\ &= P[X=0] + P[Y=0] - P[X=0 \cap Y=0] \\ &= P[X=0] + P[Y=0] - P[X=0]P[Y=0] \end{aligned}$$

Car X et Y sont supposées indépendantes

$$\text{Ainsi } P[T=0] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{8-1}{16} = \frac{7}{16}$$

Le résultat attendu :

T	0	1	2	4
$P[T=t]$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

c) $T = X + Y$ d'où l'espérance de T se calcule
Comme $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
Puisque X et Y sont indépendantes (énoncé)

$$\text{Or, } E[X] = \sum_{k=0}^2 k P[X=k] = P[X=1] + 2P[X=2] = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

X et Y ayant même loi on a $E[Y] = E[X] = \frac{5}{4}$

$$\text{Ainsi } E[T] = E[X] + E[Y] = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

3° et pour de chaque réalisation de (X,Y) on va indiquer la valeur correspondante pour (S,T) et organiser sous forme d'un tableau :

(x,y)	0	1	2
0	(0,0)	(1,0)	(2,0)
1	(1,0)	(2,1)	(3,2)
2	(2,0)	(3,2)	(4,4)

on rappelle que $S = X+Y$ et $T = XY$

ayant déjà fourni un tableau de loi du couple (X,Y) en 1° a) nous associons les valeurs correspondantes entre elles

$$P[S=0 \cap T=0] = P[X=0 \cap Y=0] = \frac{1}{16}$$

$$P[S=1 \cap T=0] = P[X=1 \cap Y=0] + P[X=0 \cap Y=1] = \frac{2}{16}$$

$$P[S=2 \cap T=0] = P[X=2 \cap Y=0] + P[X=0 \cap Y=2] = \frac{2}{8}$$

$$P[S=2 \cap T=1] = P[X=1 \cap Y=1] = \frac{1}{16}$$

$$P[S=3 \cap T=2] = P[X=2 \cap Y=1] + P[X=1 \cap Y=2] = \frac{2}{8}$$

$$P[S=4 \cap T=4] = P[X=2 \cap Y=2] = \frac{1}{16}$$

Tout autre couple pour (S,T) est irréalisable d'où :

S	0	1	2	4
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0
1	$\frac{2}{16}$	0	0	0
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0
3	0	0	$\frac{2}{16}$	0
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

on l'en observe un "0" pour chaque couple irréalisable,

$$4^o \text{ on a } E[ST] = \sum_{(s,t) \in S(2) \times T(2)} (s,t) P([S=s] \cap [T=t])$$

Or chaque terme associé à $[S=0]$ ou $[T=0]$ est nul il ne reste que :

$$\begin{aligned} E[ST] &= (2 \times 1) P([S=2] \cap [T=1]) \\ &+ (3 \times 2) P([S=3] \cap [T=2]) \\ &+ (4 \times 4) P([S=4] \cap [T=4]) \\ &= 2 \times \frac{1}{16} + 6 \times \frac{4}{16} + 16 \times \frac{4}{16} = \frac{2+24+64}{16} = \frac{90}{16} \end{aligned}$$

On retrouve bien $E[ST] = \frac{45}{8}$; valeur proposée.

Pour la formule de Huygens on a :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S; T) &= E[ST] - E[S]E[T] \\ &= \frac{45}{8} - \frac{5}{2} \times \frac{25}{16} = \frac{180 - 125}{32} = \frac{55}{32} \end{aligned}$$

Comme $\text{Cov}(S; T) \neq 0$ on pourra montrer que S et T sont dépendants

Exercice II

Partie A

$$1^o / H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $H^2 = 3H$

2^o / Si $n=1$ alors $H^1 = H$ et $3^{1-1} = 3^0 = 1$

Pour aller raisonner par récurrence on $n \in \mathbb{N}$
Pour établir que $\exists n: H^n = 3^{n-1} H$ est vraie
pour $n \in \mathbb{N}$ *

Initialisation : Si $n=1$ alors d'une part $H^1 = H^1 = H$ et d'autre part, $3^{n-1} H = 3^0 H = H$
Donc $\exists n: H^1 = 3^{1-1} H$ est établie

Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$\begin{aligned} \text{On ait } H^n &= 3^{n-1} H, \text{ alors on en déduit :} \\ H^{n+1} &= H \cdot H^n = H \cdot (3^{n-1} H) \text{ d'après } \exists n \text{ supposé} \\ &= 3^{n-1} H^2 = 3^{n-1} \cdot 3H \end{aligned}$$

d'après la remarque faite en 1^o/
Donc $H^{n+1} = 3^n \cdot H = 3^{(n+1)-1} H$

ce qui établit $\exists n: H^{n+1} = 3^n H$ est attesté.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* H^n = 3^{n-1} H$

3^o / Les trois lignes de ce système sont les mêmes

donc $(S) \Leftrightarrow x+y+z=0$

Or $x=y=z=0$ est solution de (S)

$x=1; z=-1$ et $y=0$ est aussi

solution de (S) : $1+0-1=0$

Donc (S) n'est pas de Cramer / on a trouvé au moins deux solutions.

Pour retrouver (S) sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, (S) n'est pas de Cramer donc H n'est pas inversible.

Partie B

$$1^o) B^2 = (H - I)^2 = H^2 - 2H + I \quad \text{car } I \text{ et } H \text{ commutent}$$

$$= 3H - 2H + I \quad \text{par } A1^o)$$

$$= H + I$$

des écritures explicites $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

permettent donc d'écrire $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

La définition de $B = H - I$ permet l'écriture explicite $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nous conduisant

à remarquer que $B^2 = B + 2I$

2°) on peut appliquer le théorème de Cayley-Hamilton (Faitha...)

où on obtient $B^2 = B + 2I$ ou en 1°)

$$\Leftrightarrow B^2 - B = 2I$$

$$\Leftrightarrow (B - I)B = 2I$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(B - I)B = I$$

On peut écrire que $\left[\frac{1}{2}(B - I)\right] \cdot B = I$

et, de façon très analogue, $B \cdot \left[\frac{1}{2}(B - I)\right] = I$

Par définition, B est inversible et sa matrice inverse est $B^{-1} = \frac{1}{2}(B - I) = \frac{1}{2}(H - 2I)$

Soit explicitement $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3° a) on calcule, avec $B = H - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$BU = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$BW = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -W$$

permettant de remarquer que $BU = 2U$;

$$BV = -V \quad \text{et} \quad BW = -W$$

b) on écrit $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ d'après l'énoncé

On calcule $B\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) D est diagonalisable, le calcul de $\mathcal{B}D$ est aisé:

$$\mathcal{B}D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On calcule aussi:

$$\mathcal{B}R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e) d'après B 3° d) on a $\mathcal{B}R = 3I$

Donc, on peut proposer $\frac{1}{3}R$ pour inverse de $\mathcal{B}$ (qu'il te a vérifié très soigneusement...)

Comme $\frac{1}{3}R$ est l'inverse de Q on a $R \cdot (\frac{1}{3}Q) = I$
 donc $\frac{1}{3}Q$ est l'inverse de R (on étendra aussi)
 que $(\frac{1}{3}Q)R = I$ pour valider la définition)

4° a) on pose $H_n: B^n = Q^n D^n Q^{-1}$ que l'on cherche à établir par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$
 Initialisation: pour $n=0$ on a (convention) $B^0 = I$
 et $D^0 = I$ d'où $Q^0 D^0 Q^{-1} = Q Q^{-1} = I = B^0$
 L'initialisation est vérifiée.

Hérédité: Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait
 $B^n = Q^n D^n Q^{-1}$. Alors calculons:

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n B = Q^n D^n Q^{-1} B \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= Q^n D^n Q^{-1} Q D Q^{-1} \quad (\text{remarque journalière}) \\ &= Q^n D^n \underbrace{Q^{-1} Q}_= I D Q^{-1} = Q^n D^{n+1} Q^{-1} \\ &= Q^n D^n D Q^{-1} = Q^n D^n Q^{-1} \end{aligned}$$

Ce qui valide l'hérédité.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N} \quad B^n = Q^n D^n Q^{-1}$

b) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $Q^{-1} = \frac{1}{3}R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (par 37e)

et D étant diagonale on a:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Le calcul de $B^n = Q^n D^n Q^{-1}$ sera présenté par étapes: Seule la première ligne de Q^n sera utilisée:

$$Q^n = \begin{pmatrix} 2^n + 0 + 0 & 0 + (-1)^n + 0 & 0 + 0 + (-1)^n \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Q^n) Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^n - 2(-1)^n & 2^n - 2(-1)^n + (-1)^n \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Dont la 1^{ère} ligne est $\begin{pmatrix} \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} \end{pmatrix}$
 on retire la ligne proportionnelle

Partie C

1° $H = \text{np-ones}([3, 3])$
 for k in range(3):
 for k in range(3):
 $H[k, k] = 1$

print(H)

2°) def Attila(n):

H = np.zeros([n, n])

for p in range(n):

for k in range(n):
H[p, k] = 1

return(H)

3°) def Identite(n):

I = np.zeros([n, n])

for p in range(n):

I[p, p] = 1

return(I)

NB: la commande np.zeros permet de remplir le array de "0" ne reste donc qu'à placer des "1" sur les coefficients diagonaux (type Ipp).

4°) >>> B = Attila(3) - Identite(3)

↳ B = array([[0.1, 1]
[1, 0, 1]
[1, 1, 0]])

5°) >>> n = int(input("valeur entière au moins 3"))

>>> X = np.array([1:n])

>>> EX = np.dot(X, Attila(n) - Identite(n))

>>> M = np.mean(np.dot(X, EX))

>>> print("moyenne cherchée =", M)

Remarque: Un script employant moins de commandes techniques et plus de boucles "for" est envisageable.

Exercice III

1° a) On pose D_n : $u_n \in \mathbb{R}^+$ pour $n \geq 1$ entier
on procède par récurrence pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^* D_n$

Initialisation: pour $n=1$ on a $u_1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$
Donc D_1 est vérifiée.

Hérédité: Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on ait D_n vérifiée,

soit u_n est bien défini dans $\mathbb{R}^+$ et ainsi $u_n > 0$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(n+1) \geq 2 \Rightarrow 2(n+0)n+1 > 1$
d'où le quotient $\frac{u_n}{2(n+0)n+1}$ est strictement positif avec

le dénominateur qui ne s'annule pas, permettant d'

avoir $u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ (bien défini)

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \in \mathbb{R}^+$ faisant de la

suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels bien définie.

b) from math import *

def suite(n):

u = 1/2

for k in range(n):

u = u / (2*(n+1)*u + 1)

return u

c) suite(2) calcule u_2 on j'avait float donc:

$$u_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{u_1}{2 \times (1+1) \times u_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{6}$$

soit >>> suite(2)

↳ 0.1666...67 selon précision machine

2° on calcule donc $u_3 = \frac{u_2}{2 \times 3 u_2 + 1} = \frac{1/6}{4/6 + 1} = \frac{1}{12}$

3° a) Comme $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{u_n}{2(n+1)u_{n+1}} = \frac{1}{2(n+1) + \frac{1}{u_n}} \quad \text{or} \quad 2(n+1) + \frac{1}{u_n} > 2(n+1)$$

donc $\frac{1}{2(n+1) + \frac{1}{u_n}} < \frac{1}{2(n+1)}$ c) aussi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > 0$ on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} > 0$
 d'encadrement n'en suit.

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2 \times (+\infty)} = 0$ (calcul de $\lim$)

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ (évident)

D'après le théorème d'encadrement, ayant par 3° a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$ on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$

ce qui permet de conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, le même

d'encadrement permettant la convergence.

4° a) Calculons, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{2(k+1)u_k + 1}{u_k} - \frac{1}{u_k}$$

$$= \frac{1}{u_k} [2(k+1)u_k + 1 - 1] = \frac{2(k+1)u_k}{u_k}$$

$$= 2(k+1) \quad \text{appelant } u_k \neq 0$$

(b) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était arithmétique alors on aurait que $u_{n+1} - u_n$ serait constante de k
 Mais $2(k+1)$ n'est pas une constante de $k \in \mathbb{N}^*$
 quitte à évaluer : $u_2 = u_1 + 2(1+1) = u_1 + 4$
 et $u_3 = u_2 + 2(2+1) = u_2 + 6$
 montrant explicitement que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

{(c)} La somme préparée est télescopique d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(d)} \end{array} \right\} \text{ Soit comme préparée est télescopique d'où :}$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1 \quad \text{par télescopage}$$

$$= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 2$$

ayant $u_1 = 1/2$ par 1° b) on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{u_{n+1}} - 2$$

Or, 4° a) nous fournit $u_{k+1} - u_k = 2(k+1)$

On peut donc aussi calculer :

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^n 2(k+1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n (k+1) \quad \text{par linéarité de } \sum$$

$$= 2 \sum_{k=2}^{n+1} k \quad \text{par décalage d'indice}$$

$$= 2 \left(\sum_{k=1}^{n+1} k - 1 \right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right)$$

Finalement pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a obtenu :

$$\frac{1}{u_{n+1}} - 2 = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (n+1)(\sqrt{2}) - 2$$

Ce "double calcul" permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{u_{n+1}} - 2 = (n+1)(\sqrt{2}) - 2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(\sqrt{2})}$$

et, en décalant l'indice d'écriture,

$$\forall n \geq 2 \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Calculons } \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2} = u_1.$$

La formule s'applique encore pour $n=1$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Vérification: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1) = +\infty$ (produit)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

On retrouve bien la limite de (u_n) obtenue en 3°b)

5° a) Comme $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ avec $n > 0$ on peut observer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = u_n$ ce qui effectue la télescopage.

b) D'après ce qui précède on a :

$$\forall N \geq 3 \quad \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}$$

par télescopage. Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$

et comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$ on obtient la convergence

$$\text{de } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ avec } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N u_n = 1 - 0 = 1$$

$$\text{soit } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$$

$$6^\circ \text{ par calcul direct } \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_n^{n+1}$$

$$\text{Soit } \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1) - \ln(n) \text{ pour } n \geq 2 \text{ entier.}$$

De plus, $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\text{pour } t \in [n; n+1] \text{ on a } \frac{1}{n} \geq \frac{1}{t} \text{ et donc } \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}$$

$$\text{Il vient en conclusion } \forall n \geq 2 \quad \ln(n+1) - \ln(n) = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$$

7° Fixons $N \geq 2$ entier et écrivons, à partir de 6°, en sommant membre à membre les résultats.

$$\sum_{n=2}^N (h(n+1) - h(n)) \leq \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}$$

Or, par la relation de Charles on trouve :

$$\sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \int_2^{N+1} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_2^{N+1}$$

par récurrence on trouve :

$$\sum_{n=2}^N [h(n+1) - h(n)] = h(N+1) - h(2)$$

Dans un cas, comme dans l'autre, on aboutit à :

$$h(N+1) - h(2) \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \quad (N \geq 2)$$

Mais $\lim_{N \rightarrow +\infty} h(N+1) = +\infty$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} h(N+1) - h(2) = +\infty$

et ainsi, par théorème de comparaison :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} = +\infty \text{ peuvent de dire}$$

que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ Diverge. Par décalage

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \quad (N \geq 2)$$

d'indice on a aussi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n+1} \text{ diverge pareillement.}$$

Exercice IV

1) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ donc $1 + e^x \neq 0$
et ainsi f est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
Comme donne d'une affine avec l'inverse d'une
fonction somme (d'exp et constante) deux fois
dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{On calcule } f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + 1 \quad \left(\text{car } \left(\frac{1}{v} \right)' = -\frac{v'}{v^2} \right)$$

$$\text{posons } u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$$

$$\text{et } v(x) = 1 + e^x \Rightarrow (v^2(x))' = 2v'(x)v(x) \\ \Rightarrow (v^2(x))' = 2e^x(1+e^x)$$

$$\text{d'où } f''(x) = - \frac{v'(v^2)' u}{(v^2)^2} + 0 \\ = - \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= -e^x(1+e^x) \cdot \frac{1+e^x - 2e^x}{(1+e^x)^4} = -e^x \cdot \frac{e^x - 1}{(1+e^x)^3}$$

$$\text{Soit } f \text{ strictement } \forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$$

$$\text{NB: } 1 + e^x - 2e^x = 1 - e^x = -(e^x - 1)$$

b) Nous l'avons vérifié ci-dessus.

c) La convexité de f s'étudie grâce au signe de $f''(x)$. Or, $e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du seul

signe de $e^x - 1$; en l'étudiant :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 = 0$$

Ce qui permet de dresser le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave		convexe

Comme f'' s'annule
 $\Leftrightarrow$ change de signe
 en $x=0$ on en
 déduit :

"E" admet un point d'inflexion Γ d'abscisse $x=0$

et on observe qu'il n'y en a pas d'autre.

$$\text{On calcule } f(0) = \frac{1}{1+e^0} + 0 = \frac{1}{2} = y_I$$

Conclusion $\Gamma(0; \frac{1}{2})$ est l'unique point d'inflexion de E

d) Le signe de f'' fournit les variations de f' par

le principe de Lagrange :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'			

où l'on calcule $f'(0) = 1 - \frac{e^0}{(1+e^0)^2}$
 $= 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

e) D'après le tableau des variations de f' étudié en 1°d) ; f' réalise un minimum de $\frac{3}{4} > 0$ en

$$x=0 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geq \frac{3}{4} > 0$$

En particulier, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$
 donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ par le principe de Lagrange.

2°a) On observe que $(1+e^x)' = e^x$ donc

$$\left[f_h(1+e^x) \right]' = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} : \text{ la fonction}$$

 écart dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de f_h
 avec $x \mapsto 1+e^x > 0$ par propriété de exp.

$$\text{Ainsi, } \forall t \in \mathbb{R} \quad \int_0^t \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[f_h(1+e^x) \right]_0^t$$

$$= f_h(1+e^t) - f_h(1+e^0) = f_h(1+e^t) - \frac{1}{2}$$

$$\text{Soit } \int_0^t \frac{e^x}{1+e^x} dx = f_h \left[\frac{1+e^t}{2} \right]$$

$$\text{b) qu'il à vérifier } 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

On a, en posant $X = e^x > 0$:

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{d'où pour } t \in \mathbb{R} ; \quad \varphi(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{1+e^x} + x \right) dx$$

$$= \int_0^t \frac{1}{1+e^x} dx + \int_0^t x dx \quad \text{par linéarité de } \int$$

$$= \int_0^t \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx + \left[x^2/2 \right]_0^t \quad \text{par la remarque}$$

$$= \left[x - f_h(1+e^x) \right]_0^t + \frac{t^2}{2} \quad \text{par 2°a)}$$

$$= t + \frac{t^2}{2} - f_h(1+e^t)$$

$$\begin{aligned} c) \text{ on calcule } \varphi(1) &= 1 + \frac{1}{2} - f_1\left(\frac{1+e}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} + f_1\left(\frac{2}{1+e}\right) \\ \left(\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) = -\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$3^o) \text{ car on calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} + x \\ &= 0 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = 1 - \infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(b) Il est clair que $f(x) - x = \frac{1}{1+e^x}$

peut tendre $x \in \mathbb{R}$. Or, nous avons détaillé les

calculs de $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+e^x}$ en 3^o) d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 1) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour trouver une limite nulle des deux cas.

c) D'après les calculs de 3^o) b) :

(D) est asymptote oblique à $\mathbb{C}$ au voisinage de $+\infty$
(D') est asymptote oblique à $\mathbb{C}$ au voisinage de $-\infty$

4^o) On rappelle $\Sigma : y = f'(x)(x-a) + f(a)$

est une équation de la tangente à $\mathbb{C}$ en $A(a; f(a))$

On vérifie que $A \in \mathbb{C}$ en calculant $f(0) = \frac{1}{1+e^0} + 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Puis on calcule $f'(0) = -\frac{e^0}{(1+e^0)^2} + 1$ ou en 1^o) a)
(d'après $f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + 1$ ou en 1^o) a)

ce qui permet d'obtenir : $\Sigma : y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

5^o) f est continue sur $\mathbb{R}$ puisque dérivable par 1^o

Or, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ par 1^o) e)

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ par 3^o) a)}$$

or $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

D'où f charge de s'injecter sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$

D'après le TVI et son corollaire, $f \in \mathbb{R}$
admet exactement une solution $d \in \mathbb{R}$

$$\text{admet exactement une solution : } f(-1) = \frac{1}{1+e^{-1}} - 1$$

Pour avoir, par calcul : $f(-1) = \frac{1}{1+e^{-1}} - 1$

$$\text{or } f(x) = \frac{1}{2} > 0. \text{ or } 1 + e^{-1} = 1 + \frac{1}{e} > 1$$

$$\text{donc } \frac{1}{1+e^{-1}} < 1 \Rightarrow f(-1) < 0$$