.

Lois à densité particulières

Exercice $\boxed{21}$ Transformation de lois (1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme (continue) sur $[0;1[$.

On pose $Z = -\ln(1-U)$ et on note F_U la fonction de répartition de U ainsi que F_Z la fonction de répartition de Z.

1. Le cours donne directement :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ donné. On a : $t \geq 0 \iff -t \leq 0 \iff e^{-t} \leq 1$.
Or, la fonction $\exp$ est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'écrire :
$$t \geq 0 \iff 0 < e^{-t} \leq 1 \iff 0 > -e^{-t} \geq -1 \iff 1 > 1 - e^{-t} \geq 0 \iff 1 - e^{-t} \in [0;1[$$

3. Pour $t \geq 0$ on calcule alors :
$$F_Z(t) = \mathbb{P}[Z \leq t] = \mathbb{P}[-\ln(1-U) \leq t] = \mathbb{P}[\ln(1-U) \geq -t] = \mathbb{P}\left[1 - U \geq e^{-t}\right] = \mathbb{P}\left[U \leq 1 - e^{-t}\right]$$
Mais, par la question précédente, on a $t \geq 0 \iff 1 - e^{-t} \in [0;1[$. Comme nous avons supposé $t \geq 0$ nous obtenons $1 - e^{-t} \in [0;1[$ ce qui permet d'écrire, d'après le rappel effectué en 1°, que :
$$F_Z(t) = F_U\left(1 - e^{-t}\right) = 1 - e^{-t}$$
Nous observons que si $t < 0$ alors $e^{-t} > 1$ et ainsi $1 - e^{-t} < 0$ d'où $F_U(t) = 0$ dans un tel cas.

4. En résumé, nous avons démontré que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$$
et nous reconnaissons ainsi la fonction de répartition d'une loi exponentielle dans le cas $\lambda = 1$. Donc Z suit une loi exponentielle de paramètre 1.

5. On examine plus précisemment les instructions :
```
U=rd.random()
Z=-log(1-U)
```
En assimilant U à une Variable Aléatoire à densité de loi uniforme sur $[0;1[$, l'étude qui précède permet de voir que $Z = -\ln(1-U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice $\boxed{23}$ Variance de la loi Exponentielle : démonstration

Ce problème permet de démontrer la formule de calcul donnant la variance (ainsi que le moment d'ordre 2) d'une VAR suivant une loi exponentielle sans avoir recourt au théorème de transfert.

1. Les notations étant posées, on commence par observer que $Z(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ comme Z suit une loi exponentielle (pour Z) et par positivité sur $\mathbb{R}$ de $z \mapsto z^2$ (pour Y).
   (a) On calcule, pour $t \geq 0$:
$$F_Y(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = \mathbb{P}[0 \leq Z^2 \leq t] = \mathbb{P}\left[0 \leq Z \leq \sqrt{t}\right] = \mathbb{P}\left[Z \leq \sqrt{t}\right] = F_Z(t)$$
   la fonction $\sqrt{}$ étant bien croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, comme Z suit une loi exponentielle de paramètre 1, on peut identifier sa fonction de répartition $F_Z(x) = 1 - e^{-x}$ pour $x \geq 0$ et le résultat s'en suit avec $x = \sqrt{t} \geq 0$.

(b) De façon générale, et par les remarques effectuées, on synthétise :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{y}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Sur $]-\infty; 0[$, la fonction F_Y est constante nulle donc de classe $\mathcal{C}^1$ et donc aussi continue.
Sur $]0; +\infty[$, la fonction F_Y est composée d'une affine avec $\exp$ composée avec la fonction $\sqrt{\ }$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc F_Y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc également continue.
On étudie la continuité spécifiquement en $y = 0$:
- On calcule $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$ d'une part,
- On caculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - e^{-\sqrt{x}} = 1 - e^0 = 0$ d'autre part.

Ainsi, ayant $F_Y(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x)$, la fonction F_Y est continue en $y = 0$.

En conclusion, F_Y est continue sur tout $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $y = 0$ donc F_Y est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et ainsi, Y admet une densité de probabilité.

(d) F_Y est donc dérivable sauf éventuellement en $y = 0$ et ainsi, on calcule, pour $t > 0$:

$$F_Y'(t) = 0 - (-\sqrt{t})' e^{-\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}$$

et, si $t < 0$, comme $F_Y(t) = 0$ on trouve $F_Y'(t) = 0$. On pourrait considérer une densité de Y comme la fonction F_Y' sauf en $t = 0$ où l'on peut choisir une valeur (positive) arbitraire -comme 0 tout simplement. Ceci justifie alors le choix de f_Y dans la suite de l'énoncé.

2. La fonction définie par $g(t) = t f_Y(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ est bien définie même en $t = 0$ puisque $f_Y(0) = 0$ (on n'applique pas l'expression de calcul proposée).

(a) Commençons par observer que, pour tout $t > 0$ on a $g(t) = t \times \dfrac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}} = \dfrac{\sqrt{t}}{2} e^{-\sqrt{t}}$. Ainsi :

On calcule donc, d'une part, $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\sqrt{t}}{2} e^{-\sqrt{t}} = \dfrac{0}{2} e^0 = 0$.
D'autre part, $\lim\limits_{t \to 0^-} g(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} t \times 0 = 0$ et $g(0) = 0$ comme évoqué.
En conclusion, g est continue en 0.

(b) g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ comme constante et g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit d'un monôme et de f elle-même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme dérivée de F_Y qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme nous venons de prouver que g est continue en 0, il vient que g est bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. Les fonctions $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par le théorème fondamental de l'intégration ayant g continue par ce qui précède et $t \mapsto t^2 e^{-t}$ continue par produit de $\exp$ et d'un monôme.
On pourra retenir que $\varphi' = g$ et $\psi' : x \mapsto x^2 e^{-x}$ par ce même théorème.

(a) On procède à une IPP en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t^2 & \Longrightarrow & u'(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-t} & \text{avec} & v(t) = e^{-t} \end{cases}$$

qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme monôme et exponentielle respectivement, permettant de procéder au calcul pour $x \geq 0$:

$$\psi(x) = \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x (-2t) e^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^2 e^{-x} + 2\int_0^x t e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

par linéarité de l'intégrale.

(b) Comme Z suit une loi $\mathcal{E}(1)$, Z admet une espérance et $\mathbb{E}[Z]=1$ par propriété. En particulier, si f_Z désigne une densité de Z alors :

$$1=\mathbb{E}[Z]=\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} tf_Z(t)\,\mathrm{d}t$$

comme f_Z est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et, comme $\forall t\geq 0\ \ f_Z(t)=e^{-t}$ on trouve finalement :

$$1=\int_{0}^{+\infty} tf_Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\ 2\int_{0}^{+\infty} tf_Z(t)\,\mathrm{d}t=2\int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Par théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$ et donc, finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=\lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-x}+2\int_0^x tf_Z(t)\,\mathrm{d}t\ =0+2=2$$

(c) H est la composée de φ avec un monôme donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc calculer, on rappelant que g est continue en 0 :

$$\forall x\geq 0\ \ H'(x)=2x\varphi'(x^2)=2xg(x^2)=2x\frac{\sqrt{x^2}}{2}e^{-\sqrt{x^2}}=x^2e^{-x}$$

rappelant que $\sqrt{x^2}=|x|=x$ si $x\geq 0$.
Nous confrontons ce résultat à la dérivée de ψ qui a été donnée initialement : $\psi' : x\mapsto x^2e^{-x}$.

(d) Par ce qui précède, φ et ψ ont même dérivée sur $\mathbb{R}_+$ et ainsi $H-\varphi$ a une dérivée nulle (par différence) d'où $H-\varphi$ est constante sur $\mathbb{R}_+$ par théorème.
Il vient $\forall x\in\mathbb{R}_+\ \ H(x)-\varphi(x)=H(0)-\varphi(0)=0-0=0$ d'après l'observation proposée. Ce qui permet de conclure que φ et H coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

4. La fonction g est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

5. Par la relation de Chasles, nous avons obtenu la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui permet d'assurer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et de déterminer sa valeur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t\ \ +\ \ \int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t=0+2=2$$

6. Nous venons d'obtenir que $\mathbb{E}[Y]=2$ en calculant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Y(t)\,\mathrm{d}t$. Nous avons donc que Z possède un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}[Z]=2$ puisque $Y=Z^2$. Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}[Z]=\mathbb{E}[Z^2]-\mathbb{E}[Z]^2=2-(1)^2=1$$

7. En posant $X=\dfrac{1}{\lambda}Z$ avec $\lambda>0$ l'exercice **Transformation de lois (2)** permet d'assurer que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ et ainsi, par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}[X]=\mathbb{V}\left[\frac{1}{\lambda}Z\right]=\frac{1}{\lambda}\mathbb{V}[Z]=\frac{1}{\lambda}\times 1=\frac{1}{\lambda}$$