Concours Blanc C_3

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Exercice I : Le lieu et le mobile

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières positives d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante :

S'il est sur le point d'abscisse $k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) à l'instant n (où $n \in \mathbb{N}$), alors à l'instant $n+1$ il sera sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\frac{k}{k+1}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec probabilité $\frac{1}{k+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant n. On a donc $A_0 = 0$.
On note U l'instant où la mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que U est une variable aléatoire. On convient que U prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Voici deux exemples :

- Si les abscisses du mobile *après* son départ sont $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 1$, $A_4 = 2$, $A_5 = 0$ alors $[U = 1]$ est réalisé.
- Si les abscisses du mobile *après* son départ sont $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 0$, $A_5 = 1$ alors $[U = 4]$ est réalisé.

Partie A : étude théorique de U

1. Justifier que $\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}_{[A_{i-1}=i-1]}[A_i = i] = \dfrac{i}{i+1}$ et $\mathbb{P}_{[A_{i-1}=i-1]}[A_i = 0] = \dfrac{1}{i+1}$
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[U = k]$ à l'aide d'événements utilisant certaines des variables aléatoires A_i.
3. Sans chercher à trouver la loi des variables aléatoires $A_1, \ldots, A_n$, démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}[U = k] = \dfrac{1}{k(k+1)}$
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}[U = k] = 1$
5. En déduire la valeur de $\mathbb{P}[U = 0]$. Interpréter dans le contexte de l'énoncé.
6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}[U > n] = \dfrac{1}{n+1}$

Partie B : Simulations de U

On propose de simuler l'expérience aléatoire décrite à l'aide d'un programme Python, puis d'en étudier le comportement.

1. Recopier puis compléter le programme afin qu'il simule une réalisation de la variable aléatoire U.

```
def mob():
        k=1
        D=rd.random()
        while ....................:
                k=k+1
                D=....................
        return(.........)
print("valeur de U simulée :",.......)
```

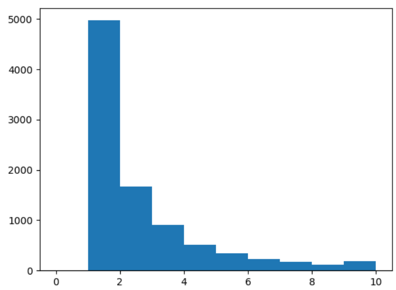
2. On suppose que l'appel de la commande `mob()` renvoie une simulation la variable aléatoire U lors du déplacement du mobile de l'expérience décrite.
   Recopier puis compléter le programme suivant pour qu'il réalise un histogramme de 10000 réalisations de U :

```
import matplotlib.pyplot as plt
ListU = np.zeros(10000)
for k in range(..........):
        ListU[k]=..............
GraphU=plt.hist(ListU, range = (0,10), bins = 10)
plt.show()
```

   Remarque : On aura préalablement charger les bibliothèques d'importation usuelles :

```
from math import*
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

3. Une exécution du programme produit l'histogramme ci-dessous :



   (a) En argumentant, peut-on dire que les valeurs observées sont en accord avec les valeurs de $\mathbb{P}[U = k]$ pour $k < 9$?
   (b) La barre représentée à $x = 9$ apparaît plus haute que celle à $x = 8$ (en abscisse). Comment l'expliquez-vous ?
   (c) Quelle valeur de moyenne empirique pouvez-vous donner à la lecture de ce graphique, pour ces 10000 réalisations ?

4. Afin de prolonger l'étude, on ajoute le code suivant :

```
F=0
for k in range(10000):
    if ListU[k]<=10:
        F=F+1
F=F/10000
print(F)
```

   la valeur de sortie est 0.9107. Comment l'interprétez-vous ?

5. L'appel, à la console, de la commande `np.max(ListU)` renvoie 48788.
   En détaillant très soigneusement votre démarche, déterminer la probabilité, sur une telle expérience (10000 réalisations) de lire une valeur à (au moins) 5 chiffres lors de la réalisation d'un tel protocole.La lecture de ce résultat est-elle alors crédible ?

Partie C : les densités à la rescousse

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité

On considère désormais une variable aléatoire T qui admet f pour densité

2. Démontrer que la fonction de répartition de T est la fonction F définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
3. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0;1[$.
4. Décrire la fonction F^{-1}, réciproque de F sur $[0;1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   On rappelle que l'on peut définir une fonction *partie entière*, ou encore `floor` comme :
   l'image par *floor* de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique valeur de $\mathbb{N}$ associée à x qui vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
   On en admet le bien-fondé. La commande Python `floor(x)` renvoie la valeur (entière) $\lfloor x \rfloor$.

   On pose $N = \lfloor T \rfloor + 1$ et on admet que N est alors une variable aléatoire.
5. Montrer que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ puis justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathbb{P}[N = n] = \mathbb{P}[n - 1 \leq T < n]$$
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}[N = n] = \dfrac{1}{n(n+1)}$
7. Proposer un programme python permettant de réaliser une simulation de la variable aléatoire N
8. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$ on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.
9. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ? Justifier.

Exercice II : Un p'tit coup dans la matrice

Partie A : basse dimension

On considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que $A = K - I_2$ où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer K^2.
2. En déduire que K n'admet aucune valeur propre réelle non nulle.
3. Etablir que A est inversible et donner son inverse A^{-1}
4. Déterminer les matrices-colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AX = -X$
5. Démontrer que -1 est l'unique valeur propre de A.
6. A l'aide de la formule du binôme de Newton, expliciter, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice A^n.

Partie B : en 3D - C mieux

On définit les matrices T, P, V et W par :
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que V est un vecteur propre de T. A quelle valeur propre est-il associé ?

2. Calculer TW. Que remarque-t-on ?
3. On pose $Q(X) = X^3 - 3X - 2$
   (a) Calculer $Q(-1)$ puis donner une forme factorisée de $Q(X)$.
   (b) Quelles sont les racines réelles de $Q(X)$?
4. Vérifier que $Q(X)$ est un polynôme annulateur de T.
5. En justifiant, déterminer les valeurs propres réelles de T
6. Calculer explicitement les produits TP et PD.
7. Déterminer explicitement la matrice D^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
8. Justifier que P est inversible puis démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $T^n = P^{-1}D^nP$.

Exercice III : Etude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1)$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$
3. On pose $u : x \mapsto x^2 + 2 - 2\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$
   (a) Dresser le tableau complet des variations de u sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) A partir des variations de u, déterminer le signe de $u(x)$ en fonction de $x > 0$
   (c) Etablir que $u(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe pour $x > 0$
4. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. *Le but de cette question est d'obtenir des informations permettant une construction de la courbe $\mathcal{C}_f$*
   (a) On note $\mathcal{D} : y = x + 1$. Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   (b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
   (c) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$
   (d) Tracer le plus soigneusement possible $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ dans le repère proposé.
   (e) Graphiquement, combien de points d'intersection compteriez-vous entre $\mathcal{C}$ et la droite $\Delta : y = x$?
6. *Recherche du point fixe $f(x) = x$*
   On considère l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x > 0$. Le but de cette question est d'obtenir une approximation de α, solution unique de $]0; 1]$ de cette équation.
   (a) En étudiant $g : x \mapsto f(x) - x$, justifier que l'équation proposée admet une unique solution α dans $]0; 1]$
   (b) L'équation $f(x) = x$ admet-elle des solutions dans $[1; +\infty[$? Justifier
   (c) Donner une interprétation graphique de α.
   (d) Démontrer que l'équation $x = f(x)$ équivaut à $x = e^{-\frac{1}{2}x}$ pour $x > 0$.
   (e) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}u_n}$.
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 1$.
   (f) Compléter le programme Python suivant pour qu'il calcule u_n lorsque n est donné entrée :

```
from math import*
n=int(input("valeur de n"))
u=......................
for k in range(n):
        u=..................
print(u)
```

   (g) Démontrer enfin que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$