

Programme de colle – Semaine 15 – du lundi 10 mars au samedi 15 mars 2025

Thème 10 - Analyse - cours n°5 : dérivation, variations et convexité suite et fin

1. Fonctions dérivables

1.1. Nombre dérivé

1.1.1. Introduction

1.1.2. Définition

- Savoir étudier la dérivabilité d'une fonction en un réel a de $\mathcal{D}_f$ en étudiant la limite du taux d'accroissement de cette fonction entre a et $a + h$.

Exemple : démontrer que la fonction carré est dérivable en 2.

- Savoir étudier la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux en le point de raccordement a de $\mathcal{D}_f$.

Exemple : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} x - \frac{7}{3} & \text{si } x \in [0; 3[\\ \frac{2}{x} & \text{sinon} \end{cases}$.

Justifier que la fonction f est continue et dérivable en 3.

- Savoir donner l'équation cartésienne réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a , lorsque cette dernière est dérivable en a .

1.2. Fonction dérivée

1.3. Opérations sur les fonctions et dérivation

- Savoir calculer la fonction dérivée d'une fonction construite à partir des fonctions de références et des opérations usuelles (maintenant, **également avec la composition de fonctions**).

Exemple :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, après avoir donné leurs ensembles de dérivabilité :

(1) $f: x \mapsto 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 8$

(2) $g: x \mapsto 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 2x + 3$

(3) $h: x \mapsto x^3\sqrt{x} + 5$

(4) $k: x \mapsto \frac{3}{x^9} - \frac{7}{x^7} + \frac{3}{x^2} - 1$

(5) $\ell: x \mapsto 1 - \frac{3}{\sqrt{x}}$

(6) $m: x \mapsto \frac{3x+1}{-5x+3}$

Exemple :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, après avoir donné leurs ensembles de dérivabilité :

$$(1) f: x \mapsto (3x^2 + 8)^{10}$$

$$(2) g: x \mapsto -\frac{3}{(2x+1)^7}$$

$$(3) h: x \mapsto 4\sqrt{4x-5}$$

2. Lien avec le sens de variation et les extrema locaux éventuels

2.1. Lien avec les extrema locaux

2.2. Lien avec le sens de variation

- Savoir démontrer qu'une fonction admet un extremum local.

Exemple :

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1 .

- Savoir faire l'étude complète d'une fonction numérique : ensemble de définition, limites, calcul de la dérivée et étude de son signe, sens de variations, calcul des valeurs particulières, tracé des tangentes (notamment des tangentes horizontales) et de l'allure de la courbe représentative.