Programme de colle – Semaine 19 – du lundi 7 avril au samedi 12 avril 2025

(thème 12 : suite et fin)

Thème 12 - Probabilités - cours n°2 : conditionnement et indépendance en probabilités

1. Conditionnement - Probabilité d'une intersection d'événements

1.1. Probabilités conditionnelles

1.2. Formule des probabilités totales

1.3. Formule de Bayes

1.4. Formule des probabilités composées

- savoir appliquer en contexte la formule définissant $P_A(B)$;
- savoir appliquer en contexte la formule des probabilités totales ;
- savoir retrouver et appliquer en contexte la formule de Bayes ;
- savoir appliquer en contexte la formule des probabilités composées.

2. Indépendance en probabilités

2.1. Indépendance de deux événements

2.2. Indépendance mutuelle d'événements

- Savoir démontrer que deux événements sont indépendants ;
- Savoir utiliser l'indépendance mutuelle d'événements en situation ;
- Savoir traiter un problème, comme celui-ci-après, mêlant probas et suite arithmético-géométrique :

Tous les matins, André se demande s'il va manger des pancakes ou des céréales. Pour cela, et sachant qu'il n'optera que pour l'une et une seule de ces options de petit-déjeuner, il suit le protocole suivant :
- s'il a mangé des pancakes un matin, il décide de manger des céréales le lendemain s'il obtient pile en lançant une pièce équilibrée (il mangera de nouveau des pancakes sinon) ;
- s'il a mangé des céréales un matin, il lance deux pièces équilibrées : dans le cas où il obtient deux faces, il reprendra des céréales le lendemain matin (il changera de petit-déjeuner sinon).
Pour tout entier naturel n, on notera C_n l'événement « André mange des céréales au $n^{\text{ème}}$ matin » et p_n la valeur de $P(C_n)$. On suppose que $p_0 = P(C_0) = 0$.
(1) Déterminer p_1, $P_{\overline{C_1}}(C_2)$ puis p_2.
(2) De manière générale, donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, les valeurs de $P_{C_n}(C_{n+1})$ et $P_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$ (en fonction de n).
(3) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P(\overline{C_n})$ en fonction de p_n.
(4) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
(5) Déterminer une expression explicite de la suite (p_n).

- Savoir traiter un problème, comme celui-ci-après, mêlant probas et matrices :

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince de Saint-Exupéry, change l'état du réverbère de sa planète (allumé ou éteint) avec une probabilité de $0{,}75$.
Au jour 0*, le réverbère est éteint.*
Pour tout entier naturel n*, on note* A_n *l'événement « le réverbère est allumé au jour* n *»,*
$p_n = P(A_n), q_n = P(\overline{A_n})$ *et* $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ *la matrice colonne des probabilités.*
(1)

(a) Calculer la probabilité que le réverbère soit allumé au jour 1*, puis au jour* 2.

(b) Justifier que, pour tout entier naturel n*, on a :*

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}q_n \\ q_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n \end{cases}$$

(c) En déduire une matrice carrée A *d'ordre* 2 *telle que, pour tout entier naturel* n*,* $U_{n+1} = A \times U_n$.

(2)

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n*,* $U_n = A^n \times U_0$.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n*,* $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

(c) En déduire les expressions de p_n *et* q_n *en fonction de* n.

La semaine de la rentrée est consacrée au concours blanc n°4 (pas de colles cette semaine-là, donc).