.

NOM	....	PRENOM	....

Exercices

La dichotomie

Il s'agit ici d'implémenter et d'utiliser la méthode de la dichotomie : on trouvera la dite méthode en annexe (elle est issue de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires - hors programme en ECT-1)

1. Définir les fonctions suivantes (dans la suite, φ désignera l'une quelconque de ces fonctions) :
   - $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + x - 2$
   - $g(x) = x^7 - 3x^4 + x^3 + 5x - 2$
   - $h(x) = 5\left(\ln(x+1)\right)^3 - x$

```
def f(x):
        .........................
        .........................
def g(x):
        .........................
        .........................
def h(x):
        .........................
        .........................
```

2. Définir, pour chacune de ces fonctions, un `array` permettant d'observer *graphiquement ou numériquement*, un point d'annulation *et un seul* de $\varphi \in \{f \;\; g \; ; \; h\}$, le plus proche possible de l'origine 0.
   Vous relèverez alors les bornes d'un intervalle $I = [a; b]$ correspondant pour chacune de ces fonctions, ainsi que l'écart $|\max(\varphi(a); \varphi(b))|$ associé :

fonction	borne a	borne b	écart
f			
g			
h			

3. Pour chacune des fonctions de type φ, créer une procédure qui effectue les n premières itérations de la méthode de la dichotomie sur l'intervalle I correspondant (choisi). Le nombre n est alors fourni par l'utilisateur.
   Cette procédure devra renvoyer un encadrement de la solution α_φ *ciblée* de l'équation $\varphi(x) = 0$ à résoudre sur I_α.

fonction	Encadrement de α_φ	valeur n
f		
g		
h		

4. On change de point de vue : l'utilisateur ne fournit plus n en entrée mais ε, qualité d'approximation (de la forme 10^{-p}).
   A l'aide d'une boucle `while abs(b − a) >`ε, construire une procédure qui renvoie une solution α de l'équation $f(x) = 0$ à ε près :

```
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
```

   puis l'adapter aux équations $g(x) = 0$ et $h(x) = 0$.

5. Vérifiez la procédure avec la détermination de valeurs approchées de $\sqrt{2}$, $\ln 2$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ en les identifiant comme solution d'une équation à poser :

```
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
...
```

   Vous chercherez à obtenir une précision ϵ la plus fine possible et comparerez avec les appels en console des commandes de calcul direct de ces valeurs.

Annexe :Méthode de la dichotomie

Cette méthode est la plus simple à produire : elle consiste à choisir deux valeurs a et b telles que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Le but étant de résoudre une équation du type $\varphi(x) = 0$ et d'obtenir une valeur numérique approchée de x.

On calcule ensuite l'image de $\frac{a+b}{2}$ par φ et, suivant qu'un changement de signe s'opère entre $\varphi(a)$ et $\varphi(c)$ ou entre $\varphi(c)$ et $\varphi(b)$, on reproduit l'opération soit sur $[a;c]$, soit sur $[c;b]$. La fonction φ vérifie les conditions du corollaire (TVI & bijection)

```
from math import*
def phi(x):
        y=................. #fonction à étudier
        return(y)
#méthode de dichotomie pour phi(x)=0
a=.........
b=.........
................. #critère d'arrêt : nombre tours OU précision atteinte
        c=(a+b)/2
        if phi(a)*phi(c)<0 :
                b=c
        else
                a=c
# a et b contiennent des valeurs approchées de la solution
```

Généralisation :

Et si on cherche une solution de l'équation $\varphi(x) = k$ avec k dans l'intervalle formé par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$? Il faut réécrire la procédure mais en observant que $\varphi(x) - k = 0$ et en reprenant la démarche avec la fonction $\psi = \varphi - k$.
Ce qui donne :

```
#méthode de dichotomie pour phi(x)=k
a=.........
b=.........
................. #critère d'arrêt : nombre tours OU précision atteinte
        c=(a+b)/2
        if .................................
                b=c
        else
                a=c
# a et b contiennent des valeurs approchées de la solution
```