Chapitre 18 - Primitives d'une fonction

Au chapitre 8, nous avons appris à dériver des fonctions. Celui-ci s'intéresse au problème inverse : étant donné une fonction f , trouver une fonction F dont la dérivée est f . Nous verrons au chapitre suivant le lien entre cette question et celle de l'intégrale d'une fonction.

1 Définition

Définition 1 - Primitive. Soit f une fonction définie sur un INTERVALLE I .
UNE primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et ayant f pour dérivée, autrement dit telle que, pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.

Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$. Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

En effet, les fonctions polynomiales F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = G'(x) = -3x + 5 = f(x)$.

2 Existence et condition d'unicité

L'exemple précédent suggère qu'il n'y a pas unicité pour le calcul des primitives. Il y a toutefois unicité en un certain sens, comme le précise le résultat suivant.

Théorème 3 - Existence et « unicité » à constante additive près. Soit I un intervalle.

- (i) Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .
- (ii) Si F est UNE primitive d'une fonction f sur I , alors LES primitives de f sur I sont toutes les fonctions $F + k$, k décrivant $\mathbb{R}$.

Démonstration. On admet (i).

(ii) Si pour tout réel x de I , $G(x) = F(x) + k$, avec k un réel, alors, pour $x \in I$, $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$, donc G est une primitive de f sur I . Réciproquement, soit G une autre primitive de f sur I et considérons H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$. Alors, pour $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. H' est donc la fonction nulle sur I , ce qui signifie que H est une fonction constante sur l'intervalle I . Autrement dit, il existe un réel k tel que $H(x) = k$, pour $x \in I$, et on a donc bien $G(x) = F(x) + k$, pour $x \in I$. ■

Remarque 4 Le point (ii) de la proposition précédente exprime les points suivants :

- toute fonction de la forme $F + k$, avec k un réel, est une primitive de f sur I ;
- toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$, avec k un réel ;
- sur un INTERVALLE, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Théorème 5 - Condition d'unicité. Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I , x_0 un élément de I et y_0 un réel quelconque. Il existe alors une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, on rend unique la primitive de f en fixant sa valeur en un point de l'intervalle, x_0 en l'occurrence dans la proposition précédente.

Démonstration. Soit G une primitive de f sur I (on a supposé qu'il en existe). Alors toute primitive de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$, avec k un réel. La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$, soit $k = y_0 - G(x_0)$. Il existe donc une unique primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0 , définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$. ■

3 Calculs de primitives

Suite à ces préliminaires théoriques, il s'agit maintenant d'apprendre à calculer en pratique des primitives de fonctions usuelles.

Ces calculs reposent d'une part sur les deux résultats suivants – directement issus de la définition d'une primitive et des règles opératoires sur les fonctions dérivables :

- si F et G sont des primitives de f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I ;
- si F est une primitive de f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I ;

et d'autre part sur la connaissance du tableau des primitives des fonctions usuelles, qui consiste essentiellement à lire « à l'envers » le tableau des dérivées des fonctions usuelles :

	Fonction f	UNE primitive	Intervalles maximaux de validité
1	$f(x) = a$ (a un réel)	ax	$\mathbb{R}$
2	$f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\]-\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_- \\]0; +\infty[& \text{sinon} \end{cases}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\ln x $	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
4	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
5	$f(x) = e^x$	e^x	$\mathbb{R}$
6	$f(x) = \ln x$	$x \ln x - x$	$]0; +\infty[$

Remarque 6

- Les intervalles de la ligne 2 sont évidemment liés à l'ensemble de définition de la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$, qui dépend de la nature de α .
- La ligne 4 du tableau est le cas particulier $\alpha = -\frac{1}{2}$ de la ligne 2.
- La valeur absolue présente pour une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, à la ligne 3, indique qu'il faut être vigilant au signe lorsque l'on primitive une fonction inverse. Précisément, $x \mapsto \frac{1}{x}$ se primitive en $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en $x \mapsto \ln(-x)$ sur $]-\infty; 0[$.

Contrairement à la somme, les règles de dérivation alambiquées pour le produit et le quotient font qu'il n'existe pas de règle de primitivation pour ces opérations. En revanche, il est impératif d'apprendre à reconnaître les dérivées de fonctions composées, pour lesquelles rappelons la formule :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u. \quad (1)$$

Autrement dit, $v \circ u$ est une primitive de $u' \times v' \circ u$. Ainsi, lorsque l'on cherche à primitiver une expression de la forme $u' \times v' \circ u$, il suffit de déterminer une primitive de v' , puisque u s'impose à nous. En pratique, on pourra apprendre le tableau suivant pour les composées usuelles – qui ne sont que des cas particuliers de la formule (1) – où u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

	Composée	UNE primitive sur I	Condition sur u
1	$u' u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	u^α définie
2	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
3	$u' e^u$	e^u	
4	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u de signe CONSTANT sur I

Remarque 7

- À nouveau, la ligne 2 du tableau est le cas particulier $\alpha = -\frac{1}{2}$ de la ligne 1.
- La valeur absolue présente pour une primitive de $\frac{u'}{u}$, à la ligne 4, indique qu'il faut être vigilant quant au signe de u .

Exemple 8

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{5x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ est $x \mapsto \frac{5}{2}\sqrt{x^4+1}$.

En effet, on reconnaît une expression de la forme $\frac{1}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto x^4 + 1$, soit $u' : x \mapsto 4x^3$. Or, pour primitiver une telle expression, d'après le tableau précédent, il s'agit d'identifier $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. Il suffit alors de faire apparaître artificiellement u' au numérateur, en compensant par un facteur constant λ , soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{5x^3}{\sqrt{x^4+1}} = \underbrace{\frac{5}{4}}_{\lambda} \times \underbrace{\frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}}_{u'/\sqrt{u}} \quad \text{qui se primitive en} \quad \underbrace{\frac{5}{4}}_{\lambda} \times \underbrace{2\sqrt{x^4+1}}_{2\sqrt{u}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^4+1}.$$

- **A connaître par cœur!** Pour un réel a non nul, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{ax}$ est $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a}$.

En effet, selon la même stratégie, on reconnaît une expression de la forme e^u avec $u : x \mapsto ax$, soit $u' : x \mapsto a$ et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ax} = \underbrace{\frac{1}{a}}_{\lambda} \times \underbrace{ae^{ax}}_{u'e^u} \quad \text{qui se primitive en} \quad \underbrace{\frac{1}{a}}_{\lambda} \times \underbrace{e^{ax}}_{e^u} = \frac{e^{ax}}{a}.$$

Remarque 9 - Recommandation finale. Puisque, pour nous, primitiver une fonction se limite à réaliser l'opération inverse de celle de dérivation, ce qui s'avère moins naturel, il est vivement recommandé lorsque l'on a déterminé une primitive F d'une fonction f de vérifier son calcul en s'assurant que $F' = f$, autrement dit en dérivant la primitive trouvée F , dont la dérivée doit être f .