Chapitre 19 - Intégration sur un segment

1 Intégrale d'une fonction

Théorème 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Pour tout couple de réels $(a, b) \in I^2$, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie.

Démonstration. Soit F et G deux primitives de f sur I. Il existe alors un réel k tel que $G = F + k$ sur I. Ainsi, pour tout couple $(a, b) \in I^2$, $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$. ∎

Ce résultat liminaire justifie le bien-fondé de la définition suivante.

Définition 2 - Intégrale d'une fonction sur un segment.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Pour tout couple de réels $(a, b) \in I^2$, on appelle *intégrale de a à b de f* le réel, noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, défini par : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
La quantité $F(b) - F(a)$ est notée $[F(x)]_a^b$.

Exemple 3 $\int_2^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{5}{2}$. et $\int_1^{-2} 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_1^{-2} = (-2)^3 - 1^3 = -9$.

2 Propriétés de l'intégrales

2.1 Linéarité de l'intégrale

À l'instar des opérations de dérivation et de primitivation, l'opération d'intégration est également linéaire.

Théorème 4 - Linéarité de l'intégrale. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.
Pour tous réels λ et μ,

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 5 En particulier,

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

La linéarité de l'intégrale permet notamment de faciliter les calculs d'intégrales en isolant clairement les calculs de primitives à effectuer, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 6

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t = 2\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left[\ln|t|\right]_1^2 - \left[2\sqrt{t}\right]_1^2 = 2(\ln 2 - \ln 1) - \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}\right) = 2\ln 2 - 2\sqrt{2} + 2.$$

2.2 Relation de Chasles

Théorème 7 - Relation de Chasles. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les réels a, b et c de I,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La relation de Chasles permet notamment de découper les intégrales afin de gérer des questions de signe, comme l'illustre l'exemple qui suit.

Exemple 8

$$\int_{-2}^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 |x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 -x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{5}{2}.$$

Corollaire 9 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.3 Intégration *vs* inégalités

✖ **Attention !** ✖ Pour toutes les propriétés liant intégrales et inégalités, les bornes a et b des intégrales doivent être ordonnées : $\boxed{a \leqslant b}$.

Théorème 10 - Inégalité triangulaire. Si f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 11 - Positivité. Si f est une fonction continue et POSITIVE sur le segment $[a\,;b]$, avec $a \leqslant b$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

On déduit de cette propriété de positivité de l'intégrale la propriété de croissance suivante.

Corollaire 12 - Croissance. Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a\,;b]$, avec $a \leqslant b$.
Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Ce dernier résultat permet notamment d'encadrer la valeur d'une intégrale a priori, *i.e.* sans la calculer explicitement.

Exemple 13 $\displaystyle 3 \leqslant \int_0^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 3\,\mathrm{e}^9.$

En effet, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [0\,;3]$, $1 = \mathrm{e}^{0^2} \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{3^2} = \mathrm{e}^9$. Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^3 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^3 \mathrm{e}^9\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad [x]_0^3 \leqslant \int_0^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^9\,[x]_0^3 \quad\Longrightarrow\quad 3 \leqslant \int_0^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 3\,\mathrm{e}^9\,.$$

2.4 Intégration par parties

Théorème 14 - Formule d'intégration par parties. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et telles que leurs dérivées u' et v' soient continues sur I. Pour tous réels $a, b \in I$,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Cette formule découle directement de la règle de dérivation d'un produit :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

■

L'intérêt de la formule d'intégration par parties est donc de passer de l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ à l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, en espérant que le calcul de cette dernière soit plus facile à effectuer.

Exemple 15 $\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1.$

En effet, en posant $\left|\begin{array}{ll} u'(t) = \mathrm{e}^t & u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array}\right.$, les fonctions u et v sont dérivables sur $[0\,;1]$ et u' et v' continues sur $[0\,;1]$, ainsi, par intégration par parties,

$$\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[t\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 0 - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

Exemple 16 $\int_1^{\mathrm{e}} t\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$

En effet, en posant $\left|\begin{array}{ll} u'(t) = t & u(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \end{array}\right.$, les fonctions u et v sont dérivables sur $[1\,;\mathrm{e}]$ et u' et v' continues sur $[1\,;\mathrm{e}]$, ainsi, par intégration par parties,

$$\int_1^{\mathrm{e}} t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

2.5 Fonction définie par une intégrale

Théorème 17 - Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Autrement dit, F est une primitive de f sur I.

Précisément, F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. En effet, $F(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

L'esprit de la preuve de ce théorème est à retenir, comme nous le montrera l'exemple qui la suit.

Démonstration. La fonction f étant continue sur I, elle admet une primitive G sur I. On a alors, par définition de l'intégrale, $F(x) = G(x) - G(a)$. F est donc une fonction dérivable sur I, G l'étant, et $F'(x) = G'(x) - 0 = f(x)$, pour tout $x \in I$. ■

Exemple 18 La fonction définie par $H(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$.

En effet, soit F une primitive de la fonction continue $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$, alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $H(x) = F\left(x^2\right) - F(1)$. Par opérations, H est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$H'(x) = 2xF'\left(x^2\right) - 0 = 2xf\left(x^2\right) = \frac{2x}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}.$$

Remarque 19 - Retrouver une primitive de $\ln$. $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$ et, pour un réel $x > 0$, on peut calculer cette intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

En effet, en posant $\left|\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \end{array}\right.$, les fonction u et v sont dérivables sur $[0\,;x]$ et u' et v' continues sur $[1\,;x]$, ainsi, par intégration par parties,

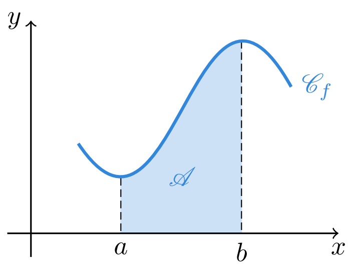
$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - 0 - \int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - (x-1) = x\ln x - x + 1.$$

3 Interprétation en termes d'aire

Historiquement, le concept d'intégrale d'une fonction a été introduit pour calculer des aires. Précisément, si f est une fonction continue et POSITIVE sur un segment $[a\,;b]$, avec $a < b$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est définie à l'origine comme l'aire $\mathscr{A}$ de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses (Ox) et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



4 Application aux variables aléatoires à densité

Parmi les lois usuelles finies, nous avons introduit la loi uniforme sur un intervalle d'entiers $\mathscr{U}(⟦a\,;b⟧)$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Rappelons que pour une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{U}(⟦a\,;b⟧)$, $\mathrm{P}(X = k) = \dfrac{1}{b-a+1}$, pour tout $k \in ⟦a\,;b⟧$ – cette loi modélise une situation d'équiprobabilité pour laquelle chaque entier compris entre a et b a la même probabilité d'être la valeur prise par X.

On peut généraliser cette modélisation en s'intéressant à une variable aléatoire X qui prend ces valeurs non plus parmi des entiers mais parmi n'importe quel réel d'un intervalle $[a\,;b]$, avec $a < b$, X désigne alors un réel « choisi au hasard » dans $[a\,;b]$. Dans ce contexte, l'événement $(X = k)$, avec $k \in [a\,;b]$, est de probabilité nulle. En revanche, on peut s'intéresser à la probabilité de l'événement $(c \leqslant X \leqslant d) = (X \in [c\,;d])$, pour $c, d \in [a\,;b]$, autrement dit la probabilité que X prenne ses valeurs dans l'intervalle $[c\,;d] \subset [a\,;b]$. Naturellement, pour la loi uniforme sur $[a\,;b]$, afin de traduire une situation d'équiprobabilité, cette probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[c\,;d]$ relativement à l'intervalle $[a\,;b]$, soit

$$\mathrm{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a} = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t.$$

On appelle alors l'intégrande $t \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$ une *densité de probabilité* de la variable aléatoire X et c'est cette fonction qui définit la loi de X, via un calcul d'intégrale.

Ce formalisme peut paraître légèrement artificiel dans le contexte simple de la loi uniforme sur $[a\,;b]$. Il s'avéra en revanche profondément fécond lorsque vous étudierez les *variables aléatoires à densité* l'an prochain, *e.g.* la loi normale de paramètres μ et σ de densité $t \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.