Intégration

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
 1. \int_{-1}^1 (x^2 - 5) dx & 2. \int_0^1 \frac{x}{2}(1-x) dx & 3. \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt & 4. \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) dt & 5. \int_0^2 3e^{4x} dx \\
 6. \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx & 7. \int_1^2 \frac{t^3}{t^4+2} dt & 8. \int_1^3 e^{1-2t} dt & 9. \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x^2+2x} \right) dx & 10. \int_1^2 u\sqrt{u} du
 \end{array}$$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
 1. \int_2^3 (x+2) dx & 2. \int_{-1}^1 (2x+1)(x-5) dx & 3. \int_0^2 (t^3 - 2t) dt & 4. \int_0^1 4t\sqrt{t} dt & 5. \int_3^{10} \frac{2}{\sqrt{t-1}} dx \\
 6. \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2} & 7. \int_1^2 te^{t^2} dt & 8. \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt & 9. \int_1^2 u \ln u du & 10. \int_1^2 \frac{e^u}{e^u+1} du
 \end{array}$$

Exercice 3 Exprimer les intégrales suivantes en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ présent :

$$1. \int_{-1}^1 ae^{3x-2} dx \quad 2. \int_0^a \frac{x}{2} e^{-x^2} dx \quad 3. \int_0^2 u\sqrt{u^2+a} du \quad 4. \int_e^{e^a} \frac{1}{t \ln t} dt \quad 5. \int_0^2 t^a(1+t) dt$$

Exercice 4 Exprimer les intégrales suivantes en fonction du paramètre $n \in \mathbb{N}$ présent :

$$1. \int_{e^{-1}}^1 2x + \ln(x^n) dx \quad 2. \int_0^n \frac{t}{t+1} dt \quad 3. \int_1^2 \frac{n}{u^{n+1}} du \quad 4. \int_1^4 \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} dt \quad 5. \int_{-1}^1 \frac{\ln t}{t^{n+2}} dt$$

Exercice 5 On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les valeurs de $\int_{-1}^1 f(x) dx$ ainsi que de $\int_1^3 f(x) dx$
3. En déduire la valeur de $\int_{-1}^3 f(x) dx$

Exercice 6 On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{5}t} + \frac{1}{4} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les valeurs de $\int_{-3}^0 g(t) dt$ ainsi que de $\int_0^5 g(t) dt$
3. En déduire la valeur de $\int_{-3}^5 g(t) dt$

Exercice 7 Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 1 de la fonction $f : t \mapsto t^2 \ln t$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 0 de la fonction $f : t \mapsto 2te^{-t/2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Soient a et b deux réels donnés. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = (ax + b)e^{2x}$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, en fonction de a et b , l'expression de $F'(x)$. On notera f la fonction F' par la suite.
3. Justifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha x + \beta)e^{2x}$ où α et β sont des constantes à expliciter en fonction de a et b .
4. Exprimer les constantes a et b en fonction de α et β .
5. Applications :
 - (a) Déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (4x + 3)e^{2x}$
 - (b) Calculer la valeur exacte de $\int_{-2}^3 (5 - 2x)e^{2x} dx$

Exercice 10 Soient a, b et c trois réels donnés. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, en fonction de a, b et c , l'expression de $F'(x)$. On notera f la fonction F' par la suite.
3. Justifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$ où α, β et γ sont des constantes à expliciter en fonction de a, b et c .
4. Exprimer les constantes a, b et c en fonction de α, β et γ .
5. Applications :
 - (a) Déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$
 - (b) Calculer la valeur exacte de $\int_{-1}^2 (2 - 3x^2)e^{-x} dx$

Exercice 11 Encadrer les intégrales suivantes à l'aide des valeurs minimales et maximales de la fonction intégrée :

$$1. \int_1^3 \frac{1}{1+x^2} dx \quad 2. \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} \quad \triangle 3. \int_{-1}^3 e^{-x^2/2} dx \quad 4. \int_2^4 e^{\sqrt{t}} dt \quad 5. \int_1^4 \frac{2}{1+3t^4} dt$$

Remarque : Des encadrements bien plus fins peuvent être obtenus par la méthode des rectangles au moyen de SciLab. Voir le TP correspondant.

Exercice 12 Encadrer les intégrales suivantes à l'aide des valeurs minimales et maximales de la fonction intégrée :

$$1. \int_1^5 \frac{1}{3+x^2} dx \quad \triangle 2. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad 3. \int_0^2 e^{-2x^2} dx \quad 4. \int_{\frac{1}{4}}^4 e^{\sqrt{t}} dt \quad 5. \int_2^5 \frac{1}{3+2t^4} dt$$

Remarque : Des encadrements bien plus fins peuvent être obtenus par la méthode des rectangles au moyen de SciLab. Voir le TP correspondant.

Exercice 13 Etablir, à l'aide d'une intégrale, l'encadrement $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x > 1$

Exercice 14 Etablir, à l'aide d'une intégrale, l'encadrement $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$

Exercice 15 On définit la fonction f sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$.

Le but de l'exercice est d'obtenir un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$ que l'on ne cherchera pas à calculer directement.

1. Etablir que, pour tout $x \in [0; 1]$ on a $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$
2. On définit les intégrales J et K par :

$$J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

- (a) Etablir que $J = 3 - 4e^{-1}$
 - (b) Démontrer que $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$
 - (c) Vérifier que $J + K = 4I$
3. A partir de l'étude qui précède, déterminer un encadrement de I et vérifier que son amplitude est inférieure à 0,02.

Exercice 16 Le but de l'exercice est de calculer les valeurs des trois intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$$

1. On définit la fonction f sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
 - (a) Vérifier que f est définie, dérivable sur $[0; 1]$ en déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - (b) En déduire la valeur exacte de I
2. Justifier que $I + J = K$
3. Etablir que $K = \sqrt{2} - J$
4. Conclure quant aux valeurs de chacune des trois intégrales.

Exercice 17 Divergence et majoration de la série harmonique

On appelle *somme harmonique* la suite H_n définie pour $n \geq 1$ par : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et k vérifiant $1 \leq k \leq n$. Etablir que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

3. Démontrer alors que $(H_n)_{n \geq 1}$ admet $+\infty$ pour limite.
On dit ainsi que la série harmonique diverge (ce vocable sera introduit en ECT-2)
4. Etablir que $\forall n \geq 1$ $H_n \leq \sqrt{n} + 1$. On pourra étudier la fonction $\varphi(x) = \sqrt{x} - \ln x$ sur $[1; +\infty[$
5. Vérifier que, à partir d'un certain rang n_0 , on a $H_n \leq \sqrt{n}$.

Exercice 18 On définit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ avec convention $x^0 = 1$ sur $[0; 1]$

1. Calculez I_0 et I_1
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ on a $I_n \geq I_{n+1}$
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice 19 Le but de l'exercice est d'encadrer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$. On ne cherchera pas à déterminer de primitive de la fonction intégrée.

1. Etablir que, pour tout réel $x \in [0; 1]$ on a $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$
2. Ecrire alors un encadrement de e^{-x^2} pour $x \in [0; 1]$
3. En déduire que :

$$\forall x \in [0; 1] \quad 1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$$

4. A l'aide de la division euclidienne de X^4 par $1 + X$, établir enfin l'encadrement :

$$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 20 On définit une suite d'intégrales $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ avec convention $I_0 = \int_1^e dx$.

1. Calculez I_0 et I_1
2. Pour $x \in]1; e[$ et $n \in \mathbb{N}$, vérifiez que $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
3. En déduire les variations puis le signe de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$
4. Etablir la relation de récurrence $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)I_n \leq e$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
6. Quelle est la valeur de $nI_n + I_n + I_{n+1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$? Calculez alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

Exercice 21 D'après ESCP - 2012

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt$ et :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt$$

1. A partir de la dérivée de la fonction $t \mapsto (1+t)^{3/2}$, déterminer la valeur de u_0
2. Etablir que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$
3. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 (t^n + t^{n+1})\sqrt{1+t} dt$$

5. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5}$.

Etablir alors le rapprochement avec l'une des études de la feuille de TD 17 et comparer les deux approches.