ECT-1
2019-2020

Exercice $\boxed{19}$

1°/ On sait déjà que $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x \geq 1 + x$

(étude de la convexité de exp avec $T_0 : y = 1 + x$)

en l'écrivant avec $-x$ au lieu de $x$ on en tire :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} \geq 1 - x \Rightarrow \forall x \in [0;1]$ $e^{-x} \geq 1 - x$

On va donc prouver que $\forall x \in [0;1]$ $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

posons, à cette fin, $\varphi(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}$

$(x \in \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = -e^{-x} + 1 - x$$
$$= 1 - x - e^{-x}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} \geq 1 - x \Leftrightarrow 0 \geq 1 - x - e^{-x}$

donc $\varphi' \leq 0$ sur $[0;1]$ et ainsi $\varphi$ décroit sur $[0;1]$

On calcule $\varphi(1) = e^{-1} - 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$

Car $e > 2$ on a $\frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0$

par ailleurs $\varphi(0) = e^0 - 1 + 0 - 0 = 0$

Ainsi : $\varphi$ décroit sur $[0;1]$ et $\varphi([0;1])$

$= \left[\frac{1}{e} - \frac{1}{2} ; 0\right] \subset \mathbb{R}_-$

$\varphi$ est négative sur $[0;1]$ donc $\forall x \in [0;1]$ $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

2°/ On réécrit 1°/ avec $x^2$ au lieu de $x$
ce qui est possible car $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 \in [0;1]$

d'où :

$$\forall x \in [0;1] \quad 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$

3°/ D'après l'encadrement proposé en 2°/ :

$$\forall x \in [0;1] \quad (1-x)(1+x) \leq e^{-x^2} \leq (1-x)(1+x) + \frac{x^4}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$$

$\left\{ \begin{array}{l} x \neq -1 \\ 1 + x > 0 \end{array} \right.$

4°/ posons donc

$$\begin{array}{r|l} X^4 & 1 + X \\ \hline -(X^4 + X^3) & X^3 - X^2 + X - 1 \\ \hline -X^3 & \\ -(-X^3 - X^2) & \\ \hline X^2 & \\ -(X^2 + X) & \\ \hline -X & \\ -(-X-1) & \\ \hline +1 & \end{array}$$

Soit $\forall x \in [0;1] \quad \frac{x^4}{2(1+x)} = \frac{1}{2}\left[x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}\right]$

d'où, par propriété de conservation de l'ordre :

$$\int_0^1 (1-x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 \left[1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}\right]dx$$

$$\Leftrightarrow \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leq I \leq \int_0^1 \left(1-x+\frac{1}{2}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \left[1-\frac{1}{2}\right]-0 \leq I \leq \left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq I \leq \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right)-0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq I \leq \frac{24-12+3-4+6-12}{24}+\frac{\ln 2}{2} = \frac{5}{24}+\frac{\ln 2}{2}$$

## Exercice $\boxed{21}$

1°/ $U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt = \int_0^1 (1+t)^{1/2}\,dt$ bien définie comme $\sqrt{\ }$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $1+t \geq 0$ si $t \in [0;1]$

notons que $\left((1+t)^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{1+t}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+t} = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]'$$

donc $U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_0^1$

$$= \left[\frac{2}{3}\times 2^{3/2}\right] - \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

2°/ $U_n$ est bien définie comme intégrale d'un produit de fonctions continues sur $[0;1]$

Ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt \leq \int_0^1 t^n \times \sqrt{2}\, dt$

comme $\forall x \in [0;1] \quad \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2}$

d'où $\quad U_n \leq \sqrt{2} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall t \in [0;1] \quad t^n \sqrt{1+t} \geq 0$

donc $\quad U_n \geq 0$ par positivité de $\int$

3°/ Nous avons déjà la positivité donc $(U_n)$ minorée par 0. Par ailleurs :

$\forall t \in [0;1] \quad 0 < t^{n+1} \leq t^n$

$\Longrightarrow \quad t^{n+1} \sqrt{1+t} \leq t^n \sqrt{1+t}$

et donc par croissance /conservation de l'ordre de $\int$

on a : $\quad \int_0^1 t^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt$

$\Longrightarrow \quad U_{n+1} \leq U_n$ soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît

et la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

Comme décroissante et minorée.

4°/ Nous posons : $\begin{cases} \varphi_n(x) = x^{n+1} \Rightarrow \varphi_n'(x) = (n+1)x^n \\ \psi(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \Rightarrow \psi'(x) = \sqrt{1+x} \end{cases}$

$\varphi_n$ et $\psi$ sont dérivables à dérivées continues sur $[0;1]$

donc, par IPP on calcule :

$$U_{n+1} = \left[\varphi_n(t)\psi(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \varphi_n'(t)\psi(t)\,dt$$

$$= \left[t^{n+1} \cdot \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \cdot \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\,dt$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times 2^{3/2}\right) - 0 - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 t^n (1+t)\sqrt{1+t}\,dt$$

(linéarité de $\int$)

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 (t^n + t^{n+1})\sqrt{1+t}\,dt$$

5°/ Notons que $\int_0^1 (t^n + t^{n+1})\sqrt{1+t}\,dt$

$$= \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt + \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\,dt$$

$$= u_n + U_{n+1}$$

(avec $n \in \mathbb{N}$)

Nous pouvons donc réécrire la relation 4/ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\left[U_n + U_{n+1}\right]$$

$$\iff U_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)U_n - \frac{2}{3}(n+1)U_{n+1}$$

$$\iff U_{n+1}\left(1 + \frac{2}{3}(n+1)\right) = \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)U_n}{3}$$

$$\iff U_{n+1}\left[\frac{3 + 2n + 2}{3}\right] = \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)U_n}{3}$$

$$\iff (5+2n)\, U_{n+1} = 4\sqrt{2} - 2(n+1)U_n$$

$$\iff U_{n+1} = \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)U_n}{2n+5}$$

L'étude de la relation qui en découle se fait au chapitre des suites - TD 17.

Nous pourrons le voir la semaine prochaine.