La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante par définition.

4°/ On calcule, $x \mapsto (\ln x)^n$ étant continue comme composée de ln avec X^n sur $[1, e]$

$$I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1}\, dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_1^e (\ln x)^n\, dx$$

Or : $$I_n = \int_1^e x \times \frac{1}{x}(\ln x)^n\, dx$$

et posons $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^n \text{ avec } u(x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \\ v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$

ces deux fonctions sont dérivables à dérivées continues sur $[1, e]$ et on a ; par IPP

$$I_n = \left[\frac{x.(\ln x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}\, dx$$

$$= \frac{e \times 1}{n+1} - 0 - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1) I_n = e - I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$

5°/ Comme $\forall x \in [1, e]$ $\ln x \geq 0$

Exercice $\boxed{120}$

1°/ $I_0 = \int_1^e (\ln x)^0 \, dx = \int_1^e 1 \, dx = e - 1$

$I_1 = \int_1^e \ln(x) \, dx = [x\ln x - x]_1^e$

$= (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1)$

$= e - e - 0 + 1 = 1$

2°/ $\forall x \in]1;e[\quad 0 = \ln 1 < \ln x < \ln e = 1$

(Rappelons que ln croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $[(\ln x)^n]_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

décroissante si $x \in]1;e[$ et ainsi :

$\forall x \in]1;e[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [\ln(x)]^{n+1} < [\ln x]^n$

$0 < (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1}$

d'où

3°/ $I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx$

or, par 2°/ on a $\forall x \in]1;e[\ \forall n \in \mathbb{N} \ (\ln x)^{n+1} < (\ln x)^n$

et par conservation de l'ordre des intégrales :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx < \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

$\Longrightarrow \quad I_{n+1} < I_n$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_1^e (\ln x)^{\ldots} dx \geq 0$

d'où $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} \geq 0$

$e - (n+1) I_n \geq 0$ par 4°/

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$ $e \geq (n+1) I_n$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$

$I_n \geq 0$ donc ~~a~~ obtient

De nouveau : $0 \leq (n+1) I_n \leq e$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\iff 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Enfin $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ car e est cte

Le théorème des gendarmes permet donc d'écrire (l'existence étant fournie)

$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

6°/ $n I_n + I_n + I_{n+1} = (n+1) I_n + e - (n+1) I_n = e$

et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a donc :

$\lim_{n \to +\infty} n I_n + I_n + I_{n+1} = e$

$\iff \lim_{n \to +\infty} n I_n = e$ car $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_1^e (\ln x)$ $dx \geq 0$

d'où $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} \geq 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$ $e - (n+1) I_n \geq 0$ par 4°/

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$ $e \geq (n+1) I_n$

De nouveau : $I_n \geq 0$ donc en combinant

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq (n+1) I_n \leq e$

$\iff 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ car e est c^{te}

Le théorème des gendarmes permet donc d'écrire (l'existence étant fournie)

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

6°/ $n I_n + I_n + I_{n+1} = (n+1) I_n + e - (n+1) I_n = e$

et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a donc :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n + I_n + I_{n+1} = e$

$\iff \lim\limits_{n \to +\infty} n I_n = e$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$