Corrigé Intégration

ECT - 1

Exercice $\boxed{1}$

1°/ $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-5x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}-5\right)-\left(\frac{-1}{3}+5\right)$

$= \dfrac{2}{3}-10 = -9+\dfrac{1}{3} = -\dfrac{26}{3}$

un polynôme étant bien continu

2°/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2}(1-x)\,dx = \int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx$

$= \left[\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{6}\right]_0^1 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6} = \dfrac{3-2}{12} = \dfrac{1}{12}$

un polynôme étant bien continu

3°/ Commençons par réécrire l'expression :

$f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}} = \dfrac{t+1}{\sqrt{t+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$ $(t \geq 0)$

$= \sqrt{t+1} - \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} = (t+1)^{1/2} - (t+1)^{-\frac{1}{2}}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $[0;2] \subset \mathbb{R}_+$

comme composée et différence on rappelle que

$t \longmapsto \dfrac{(t+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est primitive de $t \longmapsto (1+t)^{\alpha}$ pour $\alpha \neq -1$

D'où :

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt = \int_0^2 \left((t+1)^{\frac{1}{2}} - (t+1)^{-\frac{1}{2}}\right) dt$$

$$= \left[\frac{(t+1)^{3/2}}{3/2} - \frac{(t+1)^{1/2}}{1/2}\right]_0^2 = \left[\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - 2(t+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\times 3\times\sqrt{3} - 2\times\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2}{3}1\times\sqrt{1} - 2\times\sqrt{1}\right)$$

$$= 0 + 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

4°/ $\int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) dt = \left[\frac{t^3}{6} - \frac{6^4}{12}\right]_0^2$

(polynôme donc continue)

$$= \frac{1}{6}\left[t^3 - \frac{1}{2}t^4\right]_0^2 = \frac{1}{6}(8-8) = 0$$

5°/ exp est continue sur $\mathbb{R}$ d'où l'on peut calculer (composition avec des linéaires) :

$$\int_0^2 3e^{4x}\,dx = \int_0^2 3\times\frac{1}{4}\times 4e^{4x}\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}e^{4x}\right]_0^2 = \frac{3}{4}(e^8 - 1)$$

6°/ $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$ est l'intégrale sur $[0;2]$ d'une fonction rationnelle avec son dénominateur

$x^2+1 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

Or $(x^2+1)' = 2x$ d'où :

$$\frac{3x}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \times \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \times \frac{-U'}{U^2}$$

avec $U = x^2+1$. On rappelle que $\left(\frac{1}{U}\right)' = \frac{-U'}{U^2}$

ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2} \times \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2+1}\right]_0^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}-1\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{10} = 1{,}2 = \frac{6}{5}$$

7/ Nous procédons de façon assez similaire :

$f(t) = \frac{t^3}{t^4+2}$ fraction rationnelle avec le dénominateur ne s'annulant pas sur $[1;2] \subset \mathbb{R}$

On a $(t^4+2)' = 4t^3$ d'où :

$f(t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4t^3}{t^4+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u'}{u}$ avec $u = t^4+2$

or $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ d'où :

$$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+2}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{4} \times \frac{4t^3}{t^4+2}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4} \times \ln(t^4+2)\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln(18) - \frac{1}{4}\ln(3)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{18}{3}\right) = \frac{1}{4}\ln 6 = \frac{\ln 6}{4}$$

8/ exp et les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$ donc leur composées aussi.

On a $\int_1^3 e^{1-2t}\,dt = \int_1^3 -\frac{1}{2} \times (-2)\, e^{1-2t}\,dt$

et on rappelle que $(e^u)' = u' e^u$

En appliquant avec $u = 1-2t$ on trouve :

$$\int_1^3 e^{1-2t}\,dt = \left[\frac{-1}{2} e^{1-2t}\right]_1^3 = -\frac{1}{2}\left(e^{-5} - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{e^{-1} - e^{-5}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^5}\right)$$

9°/ $x^2 + 2x \neq 0 \iff x(x+2) \neq 0$

$\iff x \neq 0$ et $x \neq -2$

Or $[1;2]$ ne contient ni 0 ni -2 donc la fraction rationnelle $\frac{X+1}{X^2+2X}$ y est continue.

Observons que $(x^2 + 2x)' = 2x + 2 = 2(x+1)$

ainsi : $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{2(x+1)}{x^2+2x}\,dx$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+2x)'}{(x^2+2x)}\,dx = \left[\frac{1}{2} \times \ln|x^2+2x|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 8 - \ln 3\right) = \frac{\ln(8/3)}{2} = \frac{1}{2}\ln(8/3)$$

10°/ on note $u\sqrt{u} = u^{3/2}$ et $f(x) = x^{\alpha}$ avec $\alpha > 0$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'où :

$$\int_1^2 u\sqrt{u}\,du = \left[\frac{u^{3/2+1}}{3/2+1}\right]_1^2 = \left[\frac{u^{5/2}}{5/2}\right]_1^2 = \frac{2}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right)$$