Corrigés TD - 23

ECT

Exercice 7

La fonction f est produit de ln et du carré, continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc définie en 1.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet une primitive :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \quad (\text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*)$$

quitte à vérifier $\forall x > 0 \quad F'(x) = f(x)$
(théorème fondamental de l'intégrale)

On a $F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$

Donc F, primitive de f qui s'annule en $x = 1$ existe bien. Montrons l'unicité.

Soit G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$

Supposons que $G(1) = 0$ aussi.

Alors $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$

Donc la fonction $F - G$ est une constante mais $(F-G)(1) = F(1) - G(1) = 0 - 0 = 0$

donc $\forall x > 0 \quad (F-G)(x) = 0$

$\Rightarrow \forall x > 0 \quad F(x) = G(x) \Rightarrow F = G$

d'où l'unicité !

<u>NB</u>: La démonstration de l'unicité n'exploite pas l'expression de f. On pourra retenir le résultat Général suivant :

Si f continue sur $I \subset \mathbb{R}$ non vide et $a \in I$

Alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in I)$

définit l'unique primitive de f s'annulant en $x = a$; définie sur I.

Exercice $\boxed{9}$

1°/ F est dérivable comme produit et composée de exp avec des fonctions affines.

2°/ Calculons :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = (ax+b)' e^{2x} + 2e^{2x}(ax+b)$

$= [a + 2(ax+b)]e^{2x}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = (2a x + a + 2b)\, e^{2x}$

$= f(x)$ selon l'énoncé.

3°/ D'après 2°/ on a $\alpha = 2a$ et $\beta = a + 2b$

4°/ [DONE] : $\begin{cases} a = \dfrac{\alpha}{2} \\ b = \dfrac{1}{2}\left(\beta - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\beta - \dfrac{\alpha}{4} \end{cases}$

5°/ a) $f(x) = (4x + 3)\, e^{2x}$

posons $\alpha = 4$ et $\beta = 3$

on aura $a = \dfrac{4}{2} = 2$ et $b = \dfrac{1}{2} \times 3 - \dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $F(x) = (ax + b)\, e^{2x} = \left(2x + \dfrac{1}{2}\right) e^{2x}$

et d'après les questions 1°/ à 4°/ on a

$F' = f$ donc $F(x) = \left(2x + \dfrac{1}{2}\right) e^{2x}$

definit une primitive de f

b) posons cette fois $f(x) = (-2x + 5)\, e^{2x}$

Soit $\alpha = -2$ et $\beta = 5$

par technique similaire à 5°/a) on trouve :

$F(x) = (ax + b)\, e^{2x} = \left(\dfrac{-2}{2} x + \dfrac{1}{2} \times 5 - \dfrac{-2}{4}\right) e^{2x}$

$= (-x + 3)\, e^{2x}$

Finalement :

$$\int_{-2}^{3} (5-2x)e^{2x}\,dx = \left[(-x+3)e^{2x}\right]_{-2}^{3}$$
$$= 0 - 5e^{-4} = -\frac{5}{e^4}$$

Exercice $\boxed{15}$

1°/ f est continue, dérivable sur $[0;1]$ comme quotient avec $2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ (ce qui est bien le cas ici)

Ainsi $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(2-x) - (-1)e^{-x}}{(2-x)^2}$

$$= -\frac{e^{-x}}{(2-x)^2}\left[2-x-1\right]$$

$$= -\frac{e^{-x}}{(2-x)^2}(1-x) = (x-1)\frac{e^{-x}}{(2-x)^2}$$

on observe que sur $[0;1]$ on a :

$$\begin{cases} e^{-x} > 0 \\ (2-x)^2 > 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) \leq 0$$

donc f décroît sur $[0;1]$

Il s'en suit que :

$$\min_{[0;1]} f = f(1) = \frac{e^{-1}}{(2-1)} = \frac{1}{e}$$

$$\max_{[0;1]} f = f(0) = \frac{e^{0}}{(2-0)} = \frac{1}{2}$$

et en conclusion $\forall x \in [0;1]$ $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

2°/ (a) $J = \int_0^1 (2+x)e^{-x}\,dx$

intégrale du produit d'une affine avec exp composée d'une linéaire donc continue sur $\mathbb{R}$

on a $J = 2\int_0^1 e^{-x}\,dx + \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

par linéarité de $\int$

nous calculons $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$ par IPP

(produit de $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x}$ avec $v(x) = -e^{-x}$
continues dérivables sur $[0;1]$)

Il vient $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

Ainsi $J = 2\int_0^1 e^{-x}\,dx + \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$= 3\int_0^1 e^{-x}\,dx + \left[-e^{-1} - 0\right]$

$= 3\left[-e^{-x}\right]_0^1 - \frac{1}{e} = -3e^{-1} + 3 - \frac{1}{e}$

$= 3 - \frac{4}{e}$ $(e^{-1} = \frac{1}{e})$

(b) D'après 1°/ on a : ($x \mapsto x^2 f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ par produit)

$\forall x \in [0;1]$ $\quad \frac{x^2}{e} \leq x^2 f(x) \leq \frac{x^2}{2}$ car $x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{e}\,dx \leq K \leq \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \leq K \leq \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} \times \frac{1}{3} \leq K \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$

(c) $J + K = \int_0^1 \left[(2+x)e^{-x} + x^2 \frac{e^{-x}}{2-x}\right]dx$ (linéarité)

$$= \int_0^1 \left[\frac{(2+x)(2-x)}{2-x} + \frac{x^2}{2-x}\right] e^{-x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4 - x^2 + x^2}{2-x}\, e^{-x}\,dx$$

$= 4 \int_0^1 \frac{1}{2-x} e^{-x}\,dx$ par linéarité

$$= 4\,I$$

3°/ on a clairement $I = \frac{J+K}{4}$

Donc $\frac{1}{4}\left[3 - \frac{4}{e} + \frac{1}{3e}\right] \leq I \leq \frac{1}{4}\left[3 - \frac{4}{e} + \frac{1}{6}\right]$

$\Rightarrow 0{,}41 \leq I \leq 0{,}43$ pour information

(conforme l'énoncé en Q 0 2)