$\boxed{\text{ECT - 1}}$

Exercice $\boxed{11}$

1°/ $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, croît sur $\mathbb{R}_+$ d'où $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est décroissante positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ d'où :

x	1		3
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{10}$

Il vient $\forall x \in [1;3]$ $\quad \frac{1}{2} \geq \dfrac{1}{1+x^2} \geq \dfrac{1}{10}$

$$\underset{\text{(ordre)}}{\Longrightarrow} \int_1^3 \frac{1}{2}\,dx \geq \int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx \geq \int_1^3 \frac{1}{10}\,dx$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{2} = 1 \geq \int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx \geq \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

2°/ On raisonne de façon identique avec :

$t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+t^2}}$ décroissante continue sur $\mathbb{R}_+$

t	0		1
t^2+2	2	$\nearrow$	3
$\sqrt{t^2+2}$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Il vient :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{3}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2}}$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3°/ On va étudier $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$

Continue et dérivable comme composée de exp et d'un polynôme.

On a $f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$ et comme $\exp > 0$ ce qui conduit à :

f' est du signe de $x \mapsto -x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

or $f(0) = e^0 = 1$

$$\left.\begin{aligned} &\text{et } \lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty \\ &\lim_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

par composition de limites.

On aura de même $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

En conclusion :

x	-1		0		3
f	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$e^{-9/2}$

Finalement :

$\forall x \in [-1; 3]$ $\quad e^{-9/2} \leq f(x) \leq 1$

$$\Longrightarrow \quad e^{-9/2}(3-(-1)) \leq \int_{-1}^{3} f(x)\,dx \leq 1 \times (3-(-1))$$

Ordre

$$\Longrightarrow \quad 4e^{-\frac{9}{2}} \leq \int_{-1}^{3} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq 4$$

4°/ $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est croissante, continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de exp et $\sqrt{\ }$

d'où

t	2	4
$e^{\sqrt{t}}$	$e^{\sqrt{2}}$ $\nearrow$	e^2

L'inégalité de la moyenne fournit directement :

$$2e^{\sqrt{2}} \leq \int_{2}^{4} e^{\sqrt{t}}\,dt \leq 2e^{2}$$

5°/ Méthode similaire, $t \mapsto \frac{2}{1+3t^4}$ est monotone sur $[1;4]$ donc :

$$\frac{6}{769} = (4-1)\frac{2}{1+3\times 256} \leq \int_{1}^{4} \frac{2}{1+3t^4}\,dt \leq \frac{2}{1+3}(4-1) = \frac{3}{2}$$