Exercice $\boxed{16}$

1°/ (a) On commence par observer que :

$\forall x \in [0;1] \qquad x^2+1 \geq 1 > 0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+1} + x > 0$

d'où $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $[0;1]$ comme composée de $\sqrt{\ }$ avec un polynôme strict. positif et ainsi f est elle-même définie et dérivable sur $[0;1]$ comme composée.

On calcule $f'(x) = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$$

$$= \frac{1\times\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(b) Nous venons de trouver une primitive de la fonction intégrée :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[f(x)\right]_0^1 = f(1) - f(0)$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(1+\sqrt{1+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

2°/ calculons :

$$I + J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \quad \text{par linéarité de } \int$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = K$$

3°/ Nous trouvons par 1°/ et 2°/ $K = I + J$

Nous calculons K autrement à partir de J :

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Nous procédons à une IPP avec :

$$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{avec} \quad u(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

u et v sont bien continues, dérivables à dérivées respectives continues sur $[0;1]$

et $J = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 1\times\sqrt{x^2+1}\,dx$

$= 1\times\sqrt{2} - 0 - K$

Réécrit : $K = \sqrt{2} - J$

4°/ Nous avons déjà $I = \ln(1+\sqrt{2})$

or : $K = \sqrt{2} - J = I + J$

$\Longrightarrow \sqrt{2} - I = 2J \Rightarrow J = \dfrac{\sqrt{2}-I}{2}$

et donc $J = \dfrac{\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{2}$

Finalement $K = \sqrt{2} - J = \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

Soit en conclusion :

$I = \ln(1+\sqrt{2})$; $J = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right)$

et $K = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$

Exercice 17

ECT-1

1°/ La fonction inverse $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier : pour tout $t \in [a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{a}$$

d'où, avec les paramètres k et n de l'énoncé :

$$\forall t \in [k;k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

(prendre $a=k$ et $b=k+1$)

$$\Longrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{k+1} \times 1 \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k} \times 1$$

d'où le résultat

2°/ Il vient de 1°/ en sommant les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\Longleftrightarrow \underset{(1)}{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}} \leq \underset{(2)}{\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt} \leq \underset{(3)}{H_n}$$

On calcule à présent :

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \text{ par hyp. rec}$$

Or : $\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1}$

$$\iff \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \iff n+1 \geq \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

Or : $2\sqrt{n+1} \leq n+1 \iff 4(n+1) \leq (n+1)^2$

$$\iff 4n+4 \leq n^2+2n+1$$

$$\iff 0 \leq n^2-2n-3$$

Calculons $\Delta = 4 + 12 = 16$

d'où $\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

Il vient (en étudiant le signe du trinôme) que

$\forall n \geq 4 \quad n^2-2n-3 \geq 0$

Donc $\forall n \geq 8 \quad n+1 \geq 2\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

permettant de conclure $\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1}$

et ainsi $H_{n+1} \leq \sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1}$

Hérédité ok

Conclusion $\forall n \geq 8 \quad H_n \leq \sqrt{n}$

En utilisant (1) Glissement d'indices
(2) relation de Chasles
(3) Définition de H_n

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad H_{n+1} - 1 \leq [\ln t]_1^{n+1} \leq H_n$

$\iff H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$

3°/ Nous savons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$ par comparaison (issue de 2°) avec $\ln(n+1) \leq H_n$

4°/ La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$ est dérivable comme somme de $\sqrt{}$ et $\ln$ sur $[1;+\infty[$ et donc continue avec :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

Or $\sqrt{x} - 2 > 0 \iff \sqrt{x} > 2 \iff x > 4$ (pour $x \in [1;+\infty[$) on en déduit le tableau de variations de φ sur $[1;+\infty[$

x	1		4		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		↘	$2-2\ln 2$ $+$	↗	

$\varphi(4) = 2 - 2\ln 2$
$= 2(1 - \ln 2) > 0$

La fonction φ est positive sur $[1, +\infty[$.

donc $\forall x \geq 1 \quad \varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \ln x$

Enfin, $H_n \leq \sqrt{n} + 1 \Leftrightarrow H_n - 1 \leq \sqrt{n}$

observons que par 2°/ on a $H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1)$

pour $n \geq 1$ donc $\forall n \geq 2 \quad H_n - 1 \leq \ln n$

si $n = 1$ on calcule directement $H_1 - 1 = 0$

et $\ln 1 = 0$ donc $H_n - 1 \leq \ln n$ vérifié.

En conclusion :

$\forall n \geq 1 \quad H_n - 1 \leq \ln n$ et $\forall x \geq 1 \quad \sqrt{x} \geq \ln x$

d'où $\forall n \geq 1 \quad H_n - 1 \leq \ln n \leq \sqrt{n}$

$\Rightarrow H_n - 1 \leq \sqrt{n} \Rightarrow H_n \leq \sqrt{n} + 1$

5°/ On observe $H_8 \leq \sqrt{8}$ par approche numérique. On rédige une récurrence :

Initialisation : si $n = n_0 = 8$ on vient de voir que $H_n \leq \sqrt{n}$

Hérédité : Supposons que, à partir d'un certain rang $n \geq n_0$ on ait $H_n \leq \sqrt{n}$