

Couples de VAR

Nous proposons ici une introduction au formalisme des couples de VAR, en lien avec les notions déjà connues.

Une reformulation de notions connues

Soient X et Y deux VAR définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$. La notation $(X; Y)$ est employée pour désigner le couple de VAR induit par X puis Y et l'on peut simplement écrire que :

$$[(X; Y) = (x; y)] = [X = x] \cap [Y = y]$$

Toutes les autres notations usuelles se transmettent via l'intersection d'événements, de façon très générale on a alors :

$$(X; Y) \in A \times B = [X \in A] \cap [Y \in B]$$

Avec $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. On en déduit pour le cas discret une écriture de la loi du couple $(X; Y)$ comme étant la donnée des probabilités élémentaires :

$$\text{loi de } (X; Y) : \quad (\mathbb{P}[(X; Y) = (x; y)])_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} = (\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]))_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$$

On peut alors résumer ces valeurs, dans le cas fini, à l'aide d'un tableau (et ainsi une matrice de loi est envisageable) en notant $p_{lk} = \mathbb{P}[(X; Y) = (x_l; y_k)]$ avec $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; \dots; y_n\}$:

	y_1	$\dots$	y_k	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}		$\dots$		p_{1n}
$\vdots$			$\ddots$		
x_l	$\vdots$		p_{lk}		$\vdots$
$\vdots$				$\ddots$	
x_m	p_{m1}		$\dots$		p_{mn}

En particulier :

$$\sum_{(l;k) \in \llbracket 1;m \rrbracket \times \llbracket 1;n \rrbracket} p_{lk} = 1$$

De plus, on peut observer que l'étude du couple $(X; Y)$ se transmet très naturellement à celle du couple $(Y; X)$.

Propriété : Dans le cas où X et Y sont discrètes, on a, pour tout $y \in Y(\Omega)$ fixé :

$$(*) \quad \mathbb{P}[Y = y] = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}[X = x] \times \mathbb{P}_{[X=x]}[Y = y] = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}[X = x] \times \mathbb{P}_{[X=x]}[(X; Y) = (x; y)]$$

On écrira un résultat analogue en intervertissant les rôles de X et de Y . On peut alors noter qu'on obtient la convergence des séries de la forme $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}[X = x] \times \mathbb{P}_{[X=x]}[(X; Y) = (x; y)]$ et résultat analogue en intervertissant les rôles de X et Y .

Cas de la somme de VAR

Nous cherchons à exprimer l'événement " $X + Y$ vaut $x_i + y_j$ avec x_i obtenu pour X et y_j obtenu pour Y " afin de démontrer la linéarité de $\mathbb{E}$.

Nous pensons avoir à écrire $[X + Y = x_i + y_j]$ par commodité mais ce n'est pas l'usage habituel : aussi surprenant que cela puisse paraître, l'événement cherché est en fait tout simplement $(X; Y) = (x_i; y_j)$. En effet :

- Supposons que $(X; Y) = (x_i; y_j)$ soit réalisé. Alors la seule valeur réelle possible pour $X + Y$ est bien $x_i + y_j$.
- Supposons que $X + Y$ vaille $x_i + y_j$, avec x_i obtenu pour X et y_j obtenu pour Y . En particulier, comme on a obtenu x_i pour X l'événement $[X = x_i]$ est réalisé. Mais il est donc de même pour $[Y = y_j]$ Donc $[X = x_i] \cap [Y = y_j]$ est réalisé. Mais nous avons introduit $[(X; Y) = (x_i; y_j)]$ comme nouvelle notation de cet (intersection d') événement.

Application : linéarité de $\mathbb{E}$ - Démonstration non exigible

La propriété de linéarité de la somme de deux variables aléatoires a en fait été énoncée en ECT-1 (conformément au programme officiel) et sa démonstration n'a pas été abordée.

Nous pouvons donc d'écrire l'espérance d'une somme ainsi :

$$\mathbb{E}[X + Y] = \sum_{(i;j) \in I \times J} (x_i + y_j) \mathbb{P}[(X; Y) = (x_i; y_j)]$$

avec $X(\Omega) = \{x_i; i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j; j \in J\}$. Finalement, la preuve s'écrit (sans peine sur le fond) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X + Y] &= \sum_{(i;j) \in I \times J} x_i \mathbb{P}[(X; Y) = (x_i; y_j)] + y_j \mathbb{P}[(X; Y) = (x_i; y_j)] \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i \mathbb{P}[(X; Y) = (x_i; y_j)] + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} y_j \mathbb{P}[(X; Y) = (x_i; y_j)] \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i \mathbb{P}[Y = y_j] \times \mathbb{P}_{[Y=y_j]}((X; Y) = (x_i; y_j)) + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} y_j \mathbb{P}[X = x_i] \times \mathbb{P}_{[X=x_i]}((X; Y) = (x_i; y_j)) \\ &= \sum_{i \in I} x_i \sum_{j \in J} \mathbb{P}[Y = y_j] \times \mathbb{P}_{[Y=y_j]}((X; Y) = (x_i; y_j)) + \sum_{j \in J} y_j \sum_{i \in I} \mathbb{P}[X = x_i] \times \mathbb{P}_{[X=x_i]}((X; Y) = (x_i; y_j)) \\ &= \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}[X = x_i] + \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}[Y = y_j] \quad \text{d'après (*)} \\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

Notation : On écrira $[X + Y = s]$ avec $s \in \mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble $\{w \in \Omega \mid X(w) + Y(w) = s\}$.

De cette façon, l'événement est *indépendant* de la façon de décrire le réel s .

Ainsi, écrire $[X + Y = x_i + y_j]$ devient complètement désuet : en pratique, on calcule simplement $s = x_i + y_j$ et on s'intéresse à $[X + Y = s]$.

Dans le cas où l'on serait intéressé par l'obtention de la somme $x_i + y_j$ amenée d'une façon spécifique par X et Y , on écrit simplement $[(X; Y) = (x; y)]$ comme vu précédemment.

Bilan :

- Si l'on s'intéresse à une (ou plusieurs) façon précise d'obtenir une certaine somme, on étudie le *couple* $(X; Y)$
- Si l'on s'intéresse au résultat d'une somme, indépendamment de la façon dont les VAR l'ont réalisée, on étudie l'événement $[X + Y = s]$
- Dans tous les cas, on évite $[X + Y = x + y]$ comme ça, pas d'ambiguïté !

Exemple : Soient $X = D6$ et $Y = D4$ deux lancers indépendants de dés (équilibrés) à (respectivement) six et quatre faces.

1. On cherche la probabilité que la somme des dés amène 6 en ayant fait 4 sur l'un des dés. C'est un cas d'étude de couple :

$$\mathbb{P}[(X; Y) \in \{(4; 2); (2; 4)\}] = \mathbb{P}[(X; Y) = (4; 2)] + \mathbb{P}[(X; Y) = (2; 4)] = \mathbb{P}([X = 4] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 4]) = \frac{1}{12}$$

On remarque que la valeur somme de 6 n'apparaît nulle part au travers du calcul ($4 + 2 = 6$ est implicite)

2. On cherche la probabilité que la somme des dés amène 4 : c'est un cas d'étude de somme que l'on décompose en couples :

$$\mathbb{P}[X + Y = 4] = \mathbb{P}[(X; Y) = (1; 3)] + \mathbb{P}[(X; Y) = (2; 2)] + \mathbb{P}[(X; Y) = (3; 1)] = \frac{1}{8}$$

Les écritures de décomposition $1 + 3 = 4$, $2 + 2 = 4$ et $3 + 1 = 4$ sont alors implicitement contenues dans les couples.

Autres opérations : Les mêmes remarques s'appliquent à d'autres opérations comme, par exemple, le **produit**.

On peut donc définir $[XY = r] = \{w \in \Omega; X(w) \times Y(w) = r\}$ pour calculer $\mathbb{P}[XY = r]$ et utiliser l'étude du couple $(X; Y)$ pour amener un produit particulier, lorsque la répartition au sein des facteurs est connue. Nous utiliserons ce type d'événements lors de l'étude de la covariance.