

Vocabulaire des Espaces de Probabilités

Nous rappelons ici les éléments de théorie générale des probabilités en considérant Ω non fini.

Le symbole ∇ mentionne les notions n'étant pas explicitement au programme mais dont la connaissance permet une meilleure compréhension des notions.

Vocabulaire de base (rappels et extensions)

- ☐ **Issue** : Toute possibilité observable résultant d'une expérience aléatoire.
- ☐ **Univers** : Un univers Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Il dépend donc de l'expérience considérée. On pourra désormais le considérer non fini.
- ☐ **Événement** : Partie E de l'univers $\mathcal{U}$ recevable dans l'étude.
On désigne de façon générale par *tribu* l'ensemble des événements "recevables" d'un univers donné.
- ☐ **Événement atomique (ou élémentaire)** : Événement à une seule issue (un singleton).
- ☐ **Événement impossible** : L'ensemble $\emptyset$ dans le contexte des expériences aléatoires.
- ☐ **Événements incompatibles** : Deux événements A et B vérifiant $A \cap B = \emptyset$
On pourra dire *compatibles* dans le cas contraire.
- ☐ **Événement contraire** : L'ensemble noté $\bar{A}$ défini par $\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$.
- ☐ **Tribu $\mathcal{A}$ des événements** : Ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de tous les événements associés à l'expérience d'univers Ω . Elle doit vérifier les propriétés axiomatiques suivantes :
 - $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$
 - Stabilité par unions dénombrables :
pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pris dans $\mathcal{A}$ on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire que toute union d'une suite d'événements est un événement
 - Stabilité par passage au complémentaire :
Si l'on a $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire que tout complémentaire d'un événement est un événement.*Remarque : les tribus sont aussi stables par intersections dénombrables (propriété).*
- ☐ **Espace probabilisable** : Le couple $(\Omega ; \mathcal{A})$ formé par l'univers Ω et la tribu $\mathcal{A}$.
- ☐ **Probabilité** : Application $\mathbb{P}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements d'un univers Ω (en fait, une tribu) à valeurs dans $[0; 1]$ vérifiant :
 - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 - $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
 - Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements pris dans $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles on a :

$$\mathbb{P} \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[A_k] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[A_k]$$

- ☐ **Espace probabilisé** : Le triplet $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega ; \mathcal{A})$

□ **Système Complet d'Événements (cas fini)** : Toute liste d'événements $A_1; \dots; A_n$ d'un même univers Ω vérifiant :

1. La réunion de tous ces événements est Ω
2. Ces événements sont deux à deux incompatibles.

□ **Système Complet d'Événements (cas général)** : Toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un même univers Ω vérifiant :

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$
2. $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

Vocabulaire associé au calcul de probabilités

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ et on notera A un événement de cet espace de probabilité non nulle.

□ **Probabilités élémentaires** : Valeur de probabilité d'un événement élémentaire.

▽ **Événement négligeable** : Événement de probabilité nulle.

Attention ! Ce n'est pas nécessairement $\emptyset$.

▽ **Événement presque sûr** : Événement de probabilité 1 (un).

Attention ! Ce n'est pas nécessairement Ω .

□ **Probabilité Conditionnelle (sachant A)** : Il s'agit de la probabilité notée $\mathbb{P}_A$ vérifiant :

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_A(E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(A)}$$

Définie seulement pour $\mathbb{P}(A) \neq 0$

□ **Événements indépendants** : On dit que B est indépendant de A lorsque $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Remarque : Par convention, on pourra dire que tout événement B est indépendant de $\emptyset$.

□ **Indépendance mutuelle d'événements** : Pour $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite d'événements de $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$, on parlera d'indépendance mutuelle lorsque toute liste finie $(E_{i_1}; E_{i_2}; \dots; E_{i_n})$ vérifie :

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(E_{i_k})$$

Remarque : on ne demande pas d'écrire de produits infinis en ECT