

Sommes et Séries

Sommes et symbole $\sum$

Dans toute la suite, les lettres n , a et b désignent des entiers naturels avec $a \leq b$ et les écritures u_k , v_k , u_i etc... renvoient à des termes de suites numériques (réelles).

• Aspect récurrent

Lorsque $n \geq a$ on a :

$$S_n = \sum_{k=a}^n u_k \implies S_{n+1} = u_{n+1} + S_n$$

• Linéarité

Se décline en deux aspects :

$$\sum_{k=a}^b (u_k + v_k) = \sum_{k=a}^b u_k + \sum_{k=a}^b v_k$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=a}^b \lambda u_k = \lambda \sum_{k=a}^b u_k$$

• Changement / glissement d'indices

$$\sum_{k=a}^b u_k = \sum_{k=0}^{b-a} u_{a+k}$$

• Regroupement/séparation de termes

Lorsque $n > b \geq a$, on peut écrire :

$$\sum_{k=a}^b u_k + \sum_{k=b+1}^n u_k = \sum_{k=a}^n u_k$$

On peut aussi parler de *relation de Chasles*

• Invariance du choix d'indice (libre)

$$\sum_{k=a}^b u_k = \sum_{i=a}^b u_i = \sum_{j=a}^b u_j = \dots$$

Attention ! Vous ne pouvez pas employer une lettre déjà prise dans l'expression, ainsi $v_n + \sum_{n=a}^b u_n$ ou encore $\sum_{n=0}^n u_n$ sont des exemples d'écritures à proscrire.

• Renversement / Symétrie

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_{n-k}$$

Peut aussi être généralisé : $\sum_{k=a}^b u_k = \sum_{k=a}^b u_{(b+a)-k}$

Séries

Nous proposons une synthèse des connaissances essentielles sur les séries (programme ECT-2). Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle (numérique) et a est un entier naturel. En pratique, on aura souvent $0 \leq a \leq 2$.

Définition : La suite $\left(\sum_{k=a}^n u_k \right)_{n \geq a}$ est appelée *série* de terme général u_k . On la note plus facilement $\sum_{n \geq a} u_n$.
 a est alors un entier naturel (le rang initial) et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique (éventuellement définie à partir de a).

Vocabulaire : Les termes $\sum_{k=a}^n u_k$ sont appelés *sommes partielles* de la série $\sum_{k \geq a} u_k$.

Définition : La série $\sum_{n \geq a} u_n$ converge signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq a}^n u_k$ est un réel S (non infini).
 Ceci revient à dire que la suite des sommes partielles converge dans $\mathbb{R}$.

Vocabulaire : On appelle *somme d'une série* $\sum_{k \geq a} u_k$ la valeur réelle finie $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq a}^n u_k$.

On note plus facilement $\sum_{k=a}^{+\infty} u_k$ la valeur de somme d'une série.

Propriété : [condition nécessaire de convergence] Si une série $\sum_{n \geq a} u_n$ converge Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Remarque : La réciproque est en générale fausse.

Vocabulaire : Toute série de la forme $\sum_{n \geq a} x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée *série géométrique*

Propriété : Une série géométrique $\sum_{n \geq a} x^n$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$

Propriété : [Somme des séries géométriques]

Pour $x \in]-1; 1[$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$