

# Lois usuelles à densité

Nous proposons de résumer les lois usuelles au moyen de cartes d'identité des lois à densité

## Lois finies

### Loi Uniforme (continue)

**Utilisation :** Situation d'équiprobabilité générant des nombres réels de  $a$  à  $b$  (comme simulation informatique).

**Notation :** On écrit  $\mathcal{U}[a ; b]$  avec  $a < b$  réels.

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{U}[a ; b]$  alors  $X(\Omega) = [a ; b]$ .

**Densité de probabilité** : Les paramètres  $a$  et  $b$  étant des réels avec  $a < b$  on a  $f_X(t) = \frac{1}{b-a}$  si  $t \in [a; b]$  (et 0 sinon).

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Loi de probabilité** : Les paramètres  $a$  et  $b$  étant des réels avec  $a < b$  on a :

$$\forall (c; d) \in [a; b]^2 \quad c \leq d \implies \mathbb{P}[c \leq X \leq d] = \frac{d - c}{b - a}$$

**Fonction de répartition** : La fonction de répartition peut être donnée par  $F_X(t) = \frac{t - a}{b - a}$  pour  $t \in [a; b]$ .

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{t - a}{b - a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Indicateurs** : Le couple espérance-variance de  $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a ; b]$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{b+a}{2}$
- $\mathbb{V}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

**Attendu** : Savoir retrouver une loi uniforme  $\mathcal{U}[a ; b]$  avec  $a < b$  entiers, à partir de la connaissance particulière de  $\mathcal{U}[0 ; 1]$ , au moyen de la transformation :

$$X = (b - a)U + a$$

avec  $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0 ; 1]$ . Les valeurs  $a$  et  $b$  sont assimilables aux variables certaines  $a\mathbb{1}$  et  $b\mathbb{1}$  respectivement.

## Loi Exponentielle

**Utilisation** : Durée de vie sans vieillissement d'un machine, d'un système.

**Notation** : On écrit  $\mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$  paramètre (représente l'inverse de la durée de vie moyenne).

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  alors  $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ .

**Densité de probabilité :** Le paramètre  $\lambda$  étant un réel strictement positif on a  $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  pour  $t \geq 0$  (et 0 sinon)

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Loi de probabilité :** Avec, de plus, les paramètres  $a$  et  $b$  réels vérifiant  $a < b$  on a :

$$\forall (a; b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad a \leq b \implies \mathbb{P}[a \leq X \leq b] = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

**Fonction de répartition :** La fonction de répartition peut être donnée par  $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  pour  $t \geq 0$  (et 0 sinon).

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

## Loi Normale centrée-réduite

**Utilisation :** Les énoncés doivent être clairs dans son utilisation.

**Notation :** On écrit  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(0; 1)$  alors  $X(\Omega) = \mathbb{R}$ .

**Densité de probabilité :** La fonction de Gauss-Laplace est notée  $\varphi$  et constitue une fonction de référence :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

**Fonction de répartition :** On peut noter la fonction de répartition  $\Phi$  qui est une primitive de  $\varphi$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$ .

On ne cherchera pas à l'expliciter formellement ! Une écriture en  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$  suffit.

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = 0$
- $\mathbb{V}[X] = 1$

## Lois Normales (générales)

**Utilisation :** Les énoncés doivent être clairs dans son utilisation.

**Notation :** On écrit  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ .

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(0; 1)$  alors  $X(\Omega) = \mathbb{R}$ .

**Densité de probabilité :** La fonction définie par :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{\mu, \sigma}(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{t-\mu}{\sigma})^2/2}$

**Fonction de répartition :** On ne cherchera pas à l'expliciter formellement ! Une écriture en  $F_{\mu, \sigma}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu, \sigma}(t) dt$  suffit.

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$

**Attendu :**  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  si, et seulement si,  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  suit une loi normale centrée-réduite.

Etudier la loi  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  à partir de cette transformation est exigible.