Vocabulaire des V.A.R. à Densité

Les notions données dans cette fiche s'appuient sur les connaissances déjà abordées en probabilités et intégration généralisée. Les définitions sont celles proposées par le B.O. consistant le programme officiel des classes ECT

Eléments caractéristiques :

- ☐ **Densité :** On appelle *densité de probabilité* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
  Remarque : En particulier, ceci requiert donc que l'intégrale écrite converge et vaut exactement 1.

- ☐ **VAR à densité :** Une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme : $F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une densité de probabilités.

Propriétés courantes :

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et on considère que X est une VAR à densité définie sur cet espace. On pourra désigner par f_X une densité de X et par F_X la fonction de répartition de X.
L'usage de ∇ signale l'absence tant d'exigence que d'exclusion de la propriété (pouvant se révéler utile).

- ☐ **Calculs de probabilités :** En posant $I = [a; b]$ intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}[X \in I] = \mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

  Remarque : En particulier,$\mathbb{P}[a \leq X \leq a] = \mathbb{P}[X = a] = 0$ pour n'importe quel réel a.

- ☐ **Régularité de F_X :** La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X à densité est continue sur tout $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ -sauf peut-être en quelques points.
  Rappel (général) : De plus, F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- ∇ **Dérivée de F_X :**La dérivée F_X' de X à densité est *une* densité de X (sauf éventuellement en quelques points).

- ∇ **Caractérisation de X à densité par F_X :** Si la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X est continue sur tout $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ -sauf peut-être en quelques points- alors X est à densité.
  Remarque : Ceci constitue une forme de réciproque de la propriété de régularité de F_X. Cette propriété (caractéristique) est utilisée comme définition des variables aléatoires à densité dans les filières ECG.

Indicateurs des VAR à densité :

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et on considère que X est une VAR à densité définie sur cet espace. On pourra désigner par f_X une densité de X et par F_X la fonction de répartition de X.
On remarquera que, en dehors de l'espérance, les définitions sont formellement identiques à celles des variables aléatoires discrètes.

- ☐ **Espérance :** Valeur, sous réserve de *convergence absolue*, définie par la formule : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$
  Remarque : Existence assurée si f_X est continue sur un segment I.

- ☐ **Variance :** Valeur définie, sous couvert d'existence, comme : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$
  Remarque : Définition invariante selon les cas discrets et continus. La formule de Koenig-Huygens s'applique encore.

- ☐ **Ecart-type :** Sous-couvert d'existence de $\mathbb{V}[X]$, valeur $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$.

- ☐ **Moment (d'ordre r) :** Avec $r \in \mathbb{N}^*$, valeur, sous couvert d'existence définie par la formule : $m_r[X] = \mathbb{E}[X^r]$
  Remarque : Existence assurée si X est finie. Le programme exige de savoir traiter explicitement le cas $r = 2$.