

Variables Aléatoires à densité

Exercice 9 1. Nous vérifions les conditions attendues pour une densité de probabilité :

- Positivité : La fonction $x \mapsto \frac{8}{9} - \frac{2}{9}x$ est affine décroissante donc, sur $[1; 4]$, son minimum est atteint en $x = 4$ et il vaut $\frac{8}{9} - \frac{2}{9} \times 4 = 0 \geq 0$. On en déduit $\forall x \in [1; 4] \ h(x) \geq 0$.
Or, en dehors, la fonction h est nulle donc positive (au sens large). On obtient la positivité de h sur \mathbb{R} .
- Continuité (presque partout) : Sur $]1; 4[$, nous venons de voir que h est affine donc continue.
Sur $]-\infty; 1[$ et sur $]4; +\infty[$ la fonction h est nulle donc continue.
En conclusion, h est continue sur \mathbb{R} sauf, éventuellement, en $x = 1$ et en $x = 4$ (nombre fini de points).
- Convergence de l'intégrale : Nous venons de voir que h est nulle sur $]-\infty; 1[$ et nulle sur $]4; +\infty[$ donc, les intégrales suivantes convergent (sont nulles) :

$$\int_{-\infty}^1 h(x) \, dx = \int_4^{+\infty} h(x) \, dx = 0$$

Sur $[1; 4]$ on peut calculer :

$$\int_1^4 h(x) \, dx = \int_1^4 \left(\frac{8}{9} - \frac{2}{9}x \right) \, dx = \left[\frac{8}{9}x - \frac{1}{9}x^2 \right]_1^4 = \frac{32}{9} - \frac{16}{9} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{16 - 7}{9} = 1$$

La relation de Chasles permet de conclure à la convergence :

$$\int_{-\infty}^1 h(x) \, dx + \int_1^4 h(x) \, dx + \int_4^{+\infty} h(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dx$$

Et le calcul des valeurs donne $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dx = 0 + 1 + 0 = 1$.

Nous avons bien établi que h est une densité de probabilité.

remarque : On peut tirer de cette étude une expression de la fonction de répartition H de X :

$$\forall x \in [1; 4] \quad H(x) = \int_1^x h(t) \, dt = \left[\frac{8}{9}t - \frac{1}{9}t^2 \right]_1^x = \frac{1}{9} (8x - x^2 - 7)$$

et compléter avec $H(x) = 0$ si $x < 1$ et $H(x) = 1$ pour $x > 4$.

2. X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dx$ converge absolument.

Or, par l'étude menée en question 1^o cette étude se ramène à celle de $\int_1^4 xh(x) \, dx$ (nullité en dehors) qui est bien définie comme intégrale sur un segment d'un produit de fonctions affines continues. On peut calculer :

$$\int_1^4 xh(x) \, dx = \int_1^4 \left(\frac{8}{9}x - \frac{2}{9}x^2 \right) \, dx = \left[\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{27}x^3 \right]_1^4 = \frac{64}{9} - \frac{128}{27} - \frac{4}{9} + \frac{2}{27} = \frac{60}{9} - \frac{126}{27} = \frac{60}{9} - \frac{42}{9} = 2$$

3. On a donc $Y = X^2$. On peut remarquer immédiatement que $\mathbb{P}[Y \in \mathbb{R}_-^*] = 0$ pour la suite.

(a) Comme $Y^2 = X$ et que la densité de X est nulle sur $]-\infty; 1[$ donc aussi sur \mathbb{R}_- on en déduit que $\mathbb{P}[X \leq 0] = 0$.
Ainsi, pour $x \geq 1$ on a :

$$\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[1 \leq X^2 \leq x] = \mathbb{P}([- \sqrt{x} \leq X \leq -1] \cup [1 \leq X \leq \sqrt{x}]) = 0 + \mathbb{P}[0 \leq X \leq \sqrt{x}]$$

par additivité des probabilités d'événements incompatibles.

Enfin, si $1 \leq x \leq 16$ alors $1 \leq \sqrt{x} \leq 4$ permettant de calculer :

$$\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[1 \leq X \leq \sqrt{x}] = \int_1^{\sqrt{x}} h(t) dt = \left[\frac{8}{9}t - \frac{1}{9}t^2 \right]_1^{\sqrt{x}} = \frac{1}{9} (8\sqrt{x} - x - 7)$$

(b) D'après la remarque initiale, il suffit de vérifier que $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq 1] = 0$. Or :

$$0 \leq \mathbb{P}[0 \leq Y \leq 1] = \mathbb{P}[0 \leq X^2 \leq 1] = \mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1] \leq \mathbb{P}[X \leq 1] = \int_{-\infty}^1 h(t) dt = 0$$

comme étudié en question 1, et par positivité et croissance des probabilités. Il vient $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq 1] = 0$ et ainsi, pour tout $x \leq 1$ on retrouver bien $\mathbb{P}[Y \leq x] = 0$

(c) Il ne reste plus qu'à traiter le cas où $x > 16$ pour calculer $\mathbb{P}[Y \leq x] = \mathbb{P}[Y \leq 16] + \mathbb{P}[16 < Y \leq x]$. Or, on a :

$$\mathbb{P}[16 < Y \leq x] = \mathbb{P}[16 < X^2 \leq x] = \mathbb{P}[-\sqrt{x} \leq X < -4] + \mathbb{P}[4 < X \leq \sqrt{x}] = 0 + \mathbb{P}[4 < X \leq \sqrt{x}]$$

$$\text{Et enfin, on a } h \text{ nulle sur }]4; +\infty[\text{ et donc, } \mathbb{P}[4 \leq X \leq \sqrt{x}] = \int_4^{\sqrt{x}} h(t) dt = 0.$$

En conclusion $\mathbb{P}[16 < Y \leq x] = 0$ dans ce dernier cas ($x > 16$) et ainsi $\mathbb{P}[Y \leq x] = \mathbb{P}[Y \leq 16] = 1$. Nous résumons :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{9} (8\sqrt{x} - x - 7) & \text{si } x \in [1; 16] \\ 0 & \text{si } x > 16 \end{cases}$$

(d) On peut retrouver une densité de Y en dérivant G , dérivable sur \mathbb{R} sauf (éventuellement) en $x = 1$ et en $x = 16$. On obtient $G'(x) = 0$ pour $x < 1$ ainsi que pour $x > 16$ et :

$$\forall x \in]1; 16[\quad G'(x) = \frac{1}{9} (8\sqrt{x} - x - 7)' = \frac{4}{9\sqrt{x}} - \frac{1}{9}$$

La fonction définie par $g(x) = \frac{4}{9\sqrt{x}} - \frac{1}{9}$ si $x \in [1; 16]$, et $g(x) = 0$ sinon convient donc, quitte à faire une vérification analogue à h .

On remarquera rapidement que $\int_1^{16} g(x) dx = [G(x)]_1^{16} = G(16) - G(1) = 1$ afin de vérifier au plus vite

(e) Comme $Y = X^2$ a une densité nulle sur $]-\infty; 1[$ et sur $]16; +\infty[$ nous n'avons aucun mal à réduire l'étude de convergence requise à celle de $\int_1^{16} xg(x) dx$ qui ne pose pas de problème :

$$\int_1^{16} xg(x) dx = \int_1^{16} x \left(\frac{4}{9\sqrt{x}} - \frac{1}{9} \right) dx = \frac{1}{9} \int_1^{16} (4\sqrt{x} - x) dx$$

ayant utilisé la linéarité de l'intégrale. La convergence est alors acquise (intégrale d'une fonction continue, bien définie, sur un intervalle fermé et borné) et ainsi le calcul donne :

$$\mathbb{E}[X] = \int_1^{16} xg(x) dx = \frac{1}{9} \int_1^{16} (4\sqrt{x} - x) dx = \frac{1}{9} \left[4 \times \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \right]_1^{16} = \frac{1}{9} \times \frac{81}{2} = \frac{9}{2}$$

4. La variable aléatoire X admet une espérance et X^2 admet aussi une espérance, donc par la formule de Koenig-Huygens on a :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{9}{2} - 2^2 = \frac{1}{2}$$

et finalement on trouvera $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour écart-type.