Matrices : étude spectrale

Exercice $\boxed{1}$ La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ étant fournie :

1. On calcule $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ainsi que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

   On en déduit $A^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
2. le calcul direct donne bien $(A - 3I_3)(A^2 - I_3) = O_3$ (matrice nulle carrée d'ordre 3)
3. On propose donc $P(X) = (X - 3)(X^2 - 1)$ qui, d'après la question précédente, est annulateur. Il ne reste qu'à le développer :
$$P(X) = X^3 - 3X^2 - X + 3$$
4. Comme $P(A) = O_3$, on réécrit, grâce à la forme développée que $A^3 - 3A^2 - A = -3I_3$ et ainsi, en factorisant :
$$\frac{-1}{3}(A^2 - 3A - I_3)A = I_3 \quad \Longleftrightarrow \quad A^{-1} = \frac{-1}{3}(A^2 - 3A - I_3) = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   après avoir argumenté de l'inversibilité de A par reconnaissance de la définiton :
   il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_3$

Exercice $\boxed{2}$ La matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ étant fournie :

1. On calcule $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ puis $B^3 = \begin{pmatrix} -2 & -16 & 13 \\ 1 & 15 & -13 \\ 1 & -12 & 14 \end{pmatrix}$.
2. Ayant calculé B^3 et B^2, on donne :
$$P(B) = B^3 - 3B^2 - B + 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -16 & 13 \\ 1 & 15 & -13 \\ 1 & -12 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -12 & 12 \\ 0 & 15 & -12 \\ 0 & -12 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   et ainsi P est un polynôme annulateur de B.
3. On trouve que $X = 1$ est racine par calcul direct puis on effectue une division euclidienne. La factorisation donne :
$$P(X) = (X - 1)(X^2 - 2X - 3) = (X - 1)(X + 1)(X - 3)$$
   la dernière étape étant obtenue par la résolution de l'équation du second degré $X^2 - 2X - 3 = 0$ en calculant $\Delta = 16 > 0$ et en obtenant 3 et -1 comme dernières racines de $P(X)$.
4. Le polynôme P est annulateur de B donc on écrit $P(B) = B^3 - 3B^2 - B + 3I_3 = O_3$ et ainsi $B^3 - 3B^2 - B = -3I_3$. En factorisant le membre de gauche, on obtient $\frac{-1}{3}(B^2 - 3B - I_3)B = I_3$ et on en déduit :
$$B^{-1} = \frac{-1}{3}(B^2 - 3B - I_3) = \frac{-1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -12 & 3 \\ 3 & 9 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
   après avoir argumenté de l'inversibilité de B par reconnaissance de la définiton :
   il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_3$

Exercice $\boxed{3}$ On considère donc la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ainsi que $Q = \frac{1}{2}P$. Commençons par observer que, pour simplifier les calculs, on a $Q^k = \frac{1}{2^k}P^k$ pour les entiers naturels k.

1. On calcule : $P^2 = \begin{pmatrix} 6 & -14 & -16 \\ 10 & 30 & 16 \\ 10 & 26 & 20 \end{pmatrix} \implies Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{15}{2} & 4 \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 5 \end{pmatrix}$
   puis $P^3 = \begin{pmatrix} -12 & -124 & -104 \\ 76 & 188 & 104 \\ 76 & 180 & 112 \end{pmatrix} \implies Q^3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{31}{2} & -13 \\ \frac{19}{2} & \frac{47}{2} & 13 \\ \frac{19}{2} & \frac{45}{2} & 14 \end{pmatrix}$.
   On remarque qu'il n'est pas attendu de fournir explicitement les puissances de Q en distribuant les coefficients.
2. On vérifie par calcul direct que $F(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ est un polynôme annulateur de Q :
   $$F(Q) = \frac{1}{8}P^3 - \frac{6}{4}P^2 + \frac{11}{2}P - 6I_3 = \frac{1}{8}\left(P^3 - 12P^2 + 44P - 48I_3\right)$$
   En remplaçant par les expressions des puissances de P calculées ci-dessus, on obtient :
   $$F(Q) = \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} -12 & -124 & -104 \\ 76 & 188 & 104 \\ 76 & 180 & 112 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 72 & -168 & -192 \\ 120 & 360 & 192 \\ 120 & 312 & 240 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 132 & -44 & -88 \\ 44 & 220 & 88 \\ 44 & 132 & 176 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}\right)$$
   et ainsi $F(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ et F est annulateur de Q.
3. On observe que $F(1) = 0$ donc $F(X)$ est factorisable par $X - 1$. A l'aide d'une division euclidienne de polynômes, on trouve $F(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 6)$ et l'étude du polynôme de second degré $X^2 - 5X + 6$ de discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$ fournit deux racines supplémentaires qui sont 2 et 3. Finalement :
   $$F(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$$
4. Nous commençons par établir que Q est inversible et comme $Q = \frac{1}{2}P$ on en déduira que P aussi est inversible. En effet :
   $$F(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 11Q - 6I_3 = O_3 \implies Q^3 - 6Q^2 + 11Q = 6I_3 \implies \frac{1}{6}(Q^2 - 6Q + 11I_3)Q = I_3$$
   et ainsi, on peut prouver (par la définition) que Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = \frac{1}{6}(Q^2 - 6Q + 11I_3)$ que l'on calcule directement à partir de nos connaissances de Q^2 et Q fournissant :
   $$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
   permettant de décrire $P^{-1} = \frac{1}{2}Q^{-1}$ que l'on vérifie : $\frac{1}{2}Q^{-1}P = \frac{1}{2}Q^{-1}(2Q) = I_3$

Exercice $\boxed{4}$ La matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ et on a $N = \frac{1}{2}M$.

1. On écrit donc, explicitement :
   $N - I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $N - 2I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $N - 3I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculons déjà le produit $(N-I_3)(N-2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $(N-I_3)(N-2I_3)(N-3I_3) = O_3$ en posant explicitement le calcul $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
3. La question précédente fournit $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$ comme polynôme annulateur de la matrice N. On en donne une forme développée : $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
4. On réécrit l'identité fournie par le polynôme annulateur trouvé précédemment en $N^3 - 6N^2 + 11N = 6I_3$, permettant d'établir que N est inversible et comme $N = \frac{1}{2}M$ on en déduira que M aussi est inversible. En effet :

$$N^3 - 6N^2 + 11N = 6I_3 \iff \frac{1}{6}(N^2 - N + 11I_3)N = I_3 \iff N\left(\frac{1}{6}(N^2 - N + 11I_3)\right) = I_3$$

On a donc, par définition, l'inverse de N donnée par $N^{-1} = \frac{1}{6}(N^2 - N + 11I_3)$ et on obtient :
$M = 2N \Rightarrow\ M{-}1 = \frac{1}{12}(N^2 - N + 11I_3)$.

Décomposons le calcul en déterminant déjà $N^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ et complétons le calcul pour obtenir :

$$N^2 - N + 11I_3 = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

et finalement, on a $M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ On rappelle que $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On pose donc $P(X) = X^3 - 3X^2 - X + 3$. On commence par calculer les puissances successives de la matrice A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 41 & -42 \\ 14 & -15 \end{pmatrix}.$$

puis, on finalise le calcul :

$$P(A) = A^3 - 3A^2 - A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 41 & -42 \\ 14 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -39 & 36 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par définition, on obtient que P est un polynôme annulateur de A.
2. On observe que $P(1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$ donc $X = 1$ est racine de $P(X)$. On factorise par $X - 1$ en posant une division euclidienne.
Ceci permet d'obtenir $P(X) = (X-1)(X^2 - 2X - 3)$ et, à l'aide du calcul du discriminant $\Delta = 16$ de $X^2 - 2X - 3$, on extrait les racines -1 et 3 de ce dernier polynôme de second degré et, finalement, on factorise en utilisant nos connaissances sur le second degré : $X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$.
Ceci permet d'aboutir à $P(X) = (X-1)(X+1)(X-3)$. Les racines de ce polynôme P, annulateur de A sont alors clairement 1, -1 et 3 donc, les valeurs propres *potentielles* de A sont 1, -1 ou 3.
3. On identifie ainsi (choix arbitraire) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$. On pose et résout les systèmes associés successifs :
   - <u>Système $AX = \lambda_1 X$</u> :

$$AX = 1 \cdot X \iff \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ll} 5x - 6y = x \\ 2x - 3y & = y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} 4x - 6y & = 0 \\ 2x - 4y & = 0 \end{array} \right.$$

On remarque qu'avec $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$ les deux équations sont équivalents, ce qui amène à ne considérer que $2x-4y=0$ elle-même équivalente à $x=2y$. En conclusion, les solutions $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de $AX=X$ sont les colonnes de la forme $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Système $AX = \lambda_2 X$:

$$AX = -1 \cdot X \iff \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5x-6y=-x \\ 2x-3y & =-y \end{cases} \iff \begin{cases} 6x-6y & =0 \\ 2x-2y & =0 \end{cases}$$

On remarque qu'avec $L_2 \leftarrow 3L_2$ les deux équations sont équivalentes, amenant à ne considérer que $2x-2y=0$ elle-même équivalente à $y=x$. En conclusion, les solutions $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de $AX=-X$ sont les colonnes de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Système $AX = \lambda_3 X$:

$$AX = 3 \cdot X \iff \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5x-6y & =3x \\ 2x-3y & =3y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-6y & =0 \\ 2x-3y & =0 \end{cases}$$

En posant la matrice annexe $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, le système se ramène à $BX = 0_2$, linéaire homogène avec $det(B) = -6+12 \neq 0$ donc B est inversible et la seule solution est donc $X = 0_2$.

4. Parmi les systèmes résolus, seuls $AX = \lambda_1 X$ et $AX = \lambda_2 X$ ont des solutions X non nulles : donc, par définition, quitte à considérer les expressions obtenues dans le cas spécifiques $a=1$, on a $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ qui sont bien valeurs propres de A.
   En revanche, bien que $\lambda_3 = 3$ soit racine du polynôme annulateur P de la matrice A, ce n'est pas une valeur propre de A.

Exercice $\boxed{16}$ On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. On commence par calculer $M^2 = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & -8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix}$ puis on écrit :

$$M^2 - 3M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & -8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 6 & -6 \\ 3 & -12 & 6 \\ 0 & -24 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Et on écrit, pour finir : $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ explicitement.

2. On vérifie par calcul explicite :

$$(M^2-3M+2I_3)(M-3I_3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8+8 & 8-8 \\ 0 & 8-8 & -8+8 \\ 0 & 8-8 & -8+8 \end{pmatrix} = O_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

3. On peut résoudre les systèmes $MX = X$, $MX = 2X$ et $MX = 3X$ d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en extraire une solution non nulle (pour chacun).
   Mais la lecture (complète) de l'énoncé nous incite à considérer trois vecteurs colonnes :

en posant $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, des calculs directs donnent :

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 3+2-4 \\ -1-4+4 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot V_1 \ ; \ MV_2 = \begin{pmatrix} 6+6-8 \\ -2-12+8 \\ -12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = 2V_2$$

et, plus laconiquement, $MV_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3V_3$.

Ainsi, les systèmes initialement évoqués admettent, chacun, au moins une solution non nulle et, par définition, M admet bien pour valeurs propres les réels $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

4. On peut utiliser un pivot de Gauss ou déterminer une matrice à proposer :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les calculs PQ et QP donnent bien I_3 d'où, P est inversible d'inverse $P^{-1} = Q$ (fournie)

5. Nous observons que la matrice P est constituée, colonne à colonne, des vecteurs V_1, V_2 et V_3. Donc, par construction (et de façon synthétique) :

$$MP = M\,(V_1\ V_2\ V_3) = (V_1\ \ 2V_2\ \ 3V_3)$$

et comme, par propriété de la multiplication matricielle, si l'on écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$PD = (V_1\ V_2\ V_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (1 \cdot V_1\ \ 2V_2\ \ 3V_3)$$

on peut conclure que $MP = PD$ et, ayant vu que P est inversible, notant P^{-1} son inverse, on trouve $MP = PD$ et donc $MPP^{-1} = PDP^{-1}$ encore écrit $M = PDP^{-1}$. Par définition, M est diagonalisable.

6. C'est la récurrence "type" donnée en cours :
   - *Initialisation* :
     Pour $n = 1$ on a $M^1 = M$ d'une part et $PD^1P^{-1} = PDP^{-1}$ d'autre part et, par la question qui précède, $M = PDP^{-1}$ ce qui atteste de l'initialisation.
   - *Hérédité* : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque et supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour cet entier n. Alors :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^nM = (PD^nP^{-1})M \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP^{-1}(PDP^{-1}) \quad \text{encore par la question qui précède} \\ &= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

     ce qui valide l'hérédité
   - *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

7. Les calculs directs et explicites fournissent, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et finalement $M^n = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & 2 - 2 \cdot 2^n & -1 + 3^n \\ -1 + 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & -2 + 3 \cdot 2^n & 1 - 3^n \\ -2 + 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & -4 + 4 \cdot 2^n & 2 - 3^n \end{pmatrix}$. On peut aussi vérifier le cas $n = 0$ à part en considérant $M^0 = I_3$