Thème 1- Algèbre et logique - cours n°1 : ensembles de nombres, calculs numériques et littéraux, équations et inéquations des premier et second degrés

1. Ensembles de nombres, ordre et inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1. Les ensembles de nombres

De manière générale, lorsque l'on considère un ensemble E d'éléments qui contient par exemple un élément e, on dit que l'élément **e appartient à l'ensemble E**, ce que l'on note $\boldsymbol{e \in E}$.
De plus, si F est un autre ensemble dont tous les éléments appartiennent à l'ensemble E, on dit que l'ensemble **F est inclus dans l'ensemble E**, ce que l'on note $\boldsymbol{F \subset E}$.
Si par exemple un ensemble E (dans lequel l'ordre n'a a priori aucune importance) est constitué des seuls éléments e, f, g et h, on note $E = \{e; f; g; h\}$.
Ces notions ensemblistes seront abordées de manière plus exhaustive dans un prochain chapitre.

On peut classer les nombres dans différents ensembles :

Définition 1
(1) L'ensemble des **entiers naturels** est constitué des nombres entiers positifs ou nuls qui sont $0, 1, 2, 3, \ldots, 1\,234\,456, 1234\,457$, etc. On le note :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ \ldots; 1\,234\,456; 1234\,457; \ldots\}$$

(« $\mathbb{N}$ » pour « nombre » et « naturel ». Ce sont les nombres les plus simples, ils servent à compter, à dénombrer des objets, etc.)
(2) L'ensemble des **entiers relatifs** est constitué des nombres entiers positifs et de leurs opposés : les nombres entiers négatifs. On le note :

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots; \ -1\,234\,456; \ -1\,234\,455; \ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots; 1\,234\,455; 1234\,456; \ldots\}$$

(« $\mathbb{Z}$ » pour « Zahl » qui signifie « nombre » en allemand. Historiquement, ces nombres entiers négatifs ont été introduits pour rendre compte d'un déficit.)
(3) L'ensemble des **nombres décimaux** est constitué des nombres qui sont quotient d'un nombre entier relatif par une puissance de 10 . On le note :

$$\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

(Signifie « tel que »)

(« $\mathbb{D}$ » pour « dix » ou « décimal »)
(4) L'ensemble des **nombres rationnels** est constitué des nombres qui sont quotient d'un nombre entier relatif par un nombre entier naturel non nul. On le note :

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$$

($\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$ est l'ensemble de tous les entiers naturels privé de 0)

(« $\mathbb{Q}$ » pour « quotient »)

(5) L'ensemble des **nombres réels** regroupe les nombres rationnels et les nombres **irrationnels,** comme par exemple π ou $\sqrt{2}$. Les nombres irrationnels (qui ont beaucoup troublé nos ancêtres, et cela depuis au moins l'antiquité !) ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un quotient d'un nombre entier relatif par un nombre entier naturel non nul. On le note $\mathbb{R}$
(« $\mathbb{R}$ » pour « réel »)

<u>Exemple 1</u>

(1) $0;\ 23;\ 895\,562\,178\,210$ et $\frac{18}{3} = 6$ sont des nombres entiers naturels.

(2) $-13; 256;\ -10^{12}; 1$ et $-\frac{72}{8} = -9$ sont des nombres entiers relatifs.

(3) $-\frac{7}{10^2}$; $2{,}243 = \frac{2\,243}{10^3}$; $10^{-12} = \frac{1}{10^{12}}$ et $\frac{3}{10} = 0{,}3$ sont des nombres décimaux.

(4) $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$; $-\frac{29}{7}$ et $\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$ sont des nombres rationnels.

(5) $\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$; $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\ldots$ et $\cos(2°) = 0{,}999\,390\,827\ldots$ sont des nombres irrationnels.

<u>Propriété 1</u>

Les ensembles de nombres sont « emboîtés » :

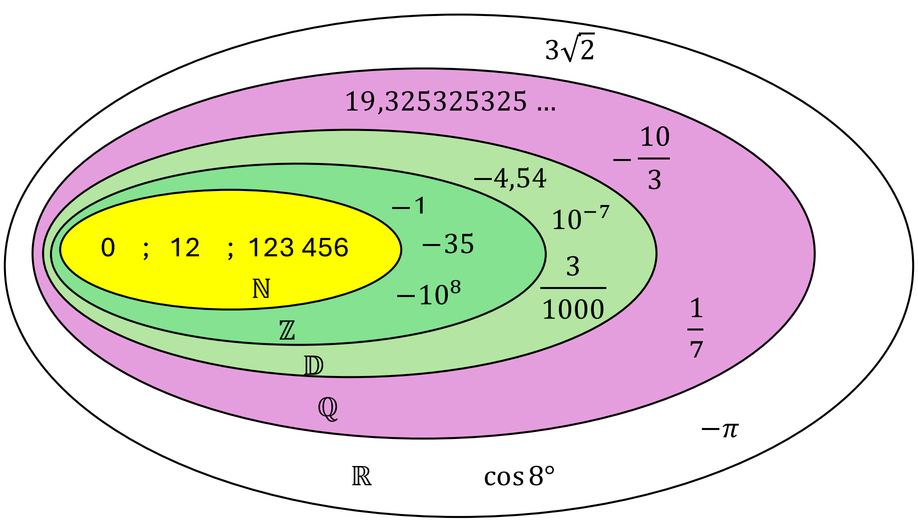
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

<u>Démonstration de la propriété 1 :</u>

<u>Remarque 1</u>

(1) Un nombre entier naturel est toujours un nombre entier relatif (la réciproque est fausse : un nombre entier relatif n'est pas forcément un entier naturel). Ainsi, l'ensemble des entiers naturels n'est pas égal à l'ensemble des entiers relatifs. De même pour les autres inclusions entre les autres ensembles.

(2) Voici un diagramme de Venn (ou « diagramme patate ») décrivant l' « emboîtement » des ensembles de nombres :



(3) Tous les nombres de ces ensembles sont des nombres réels. Ainsi, lorsque l'on demande la nature d'un nombre, où à quel ensemble appartient un nombre, il s'agit d'être le plus précis possible en donnant l'ensemble « le plus petit » (au sens de l'inclusion) auquel appartient ce nombre. Par exemple, lorsqu'on

considère le nombre $-\frac{27}{9}$, on est tenté de dire de prime abord que ce nombre est rationnel. Mais en fait, puisque $-\frac{27}{9} = -3$, on peut être beaucoup plus précis et affirmer que ce nombre est un entier relatif !

<u>Propriété 2</u>
(1) Écrit sous sa forme décimale, un **nombre décimal** possède un nombre **fini** de chiffres derrière la virgule ; un **nombre rationnel** possède un nombre **infini** de chiffres derrière la virgule, avec une séquence de chiffres qui se répète indéfiniment ; un **nombre irrationnel** possède un nombre **infini** de chiffres derrière la virgule, sans aucune séquence de chiffres qui se répète indéfiniment.
(2) Un **nombre fractionnaire**, dont l'écriture **irréductible** n'est pas un nombre entiers relatif, est un nombre décimal lorsque son dénominateur fait apparaître uniquement un produit du type $2^n \times 5^m$ (où n et m sont des entiers naturels), et est rationnel dans le cas contraire.

<u>Exemple 2</u>
(1) $0{,}324\ 123$ et $-45{,}215\ 7$ sont des nombres décimaux ; alors que les nombres $17{,}321321321\ldots$ et $-74{,}1722222\ldots$ (que l'on peut noter également $17{,}\overline{321}$ et $-74{,}17\overline{2}$; la barre signifiant que la séquence de chiffres située en dessous se répète indéfiniment) sont rationnels.
(2) $-\frac{10}{25}\left(= -\frac{2}{5}\right)$; $\frac{21}{56}\left(= \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}\right)$ et $\frac{1}{2000}\left(= \frac{1}{2^4 \times 5^3}\right)$ sont des nombres décimaux.
(3) $\frac{11}{242}\left(= \frac{1}{22} = \frac{1}{2 \times 11}\right)$ et $\frac{15}{70}\left(= \frac{3}{14} = \frac{3}{2 \times 7}\right)$ sont des nombres rationnels.

<u>Remarque 2</u>
Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des **nombres complexes**, tel que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Cet ensemble n'est pas au programme de la filière ECT.

1.2. Ordre et inégalités dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est muni d'une **relation d'ordre** naturelle, notée « $\leq$ » . Le symbole « $<$ » désigne une inégalité stricte : avec a et b deux nombres réels, « $a < b$ » signifie « $a \leq b$ » et « $a \neq b$ ». L'expression « $a \leq b$ » se lit « a inférieur ou égal à b » ou plus simplement « a inférieur à b », alors que « $a < b$ » se lit « a **strictement** inférieur à b ».

<u>Propriété 3</u>
Dans $\mathbb{R}$, la relation d'ordre est **totale**, c'est-à-dire que pour tous nombres réels a et b, on a :

$$a \leq b \text{ ou } b \leq a$$

<u>Remarque 3</u>
Avec a un nombre réel, l'expression « $a \leq 0$ » (respectivement « $a \geq 0$ ») se lit aussi « a négatif ou nul » (respectivement « a positif ou nul ») ou plus simplement « a négatif » (respectivement « a positif »), alors que « $a < 0$ » (respectivement « $a > 0$ ») se lit « a **strictement** négatif » (respectivement « a strictement positif »).

Définition 2

(1) On appelle **droite des réels**, ou **droite numérique**, une droite graduée sur laquelle chaque point est repéré de manière unique par un nombre réel, et réciproquement, chaque nombre réel est repéré par un unique point de cette droite.

(2) On peut voir les **intervalles réels** comme des ensembles continus que l'on peut identifier à des sections de la droite des réels.

Avec a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$, on distingue les neuf types d'intervalles suivants :

Notation	Description	Désignation
$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	intervalle fermé borné ou segment
$[a;b[$	$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	intervalle semi-ouvert et borné
$]a;b]$	$\{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	intervalle semi-ouvert et borné
$]a;b[$	$\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	intervalle ouvert et borné
$[a;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$	intervalle fermé et non majoré
$]a;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R}, a < x\}$	intervalle ouvert et non majoré
$]-\infty;a]$	$\{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	intervalle fermé et non minoré
$]-\infty;a[$	$\{x \in \mathbb{R}, x < a\}$	intervalle ouvert et non minoré
$]-\infty;+\infty[$	$\mathbb{R}$	

Exemple 3

Représenter sur la droite des réels les intervalles réels suivants :

$I =]-2;3,5]$, $J =]-\infty;0]$ (noté aussi $\mathbb{R}^-$) et $K =]-\frac{1}{3};+\infty[$

2. Calculs numériques et littéraux

2.1. Opérations sur les nombres réels

Définition 3

Soient a et b deux nombres réels.

(1) Le nombre réel noté $a+b$ est appelé la **somme de a et de b**. Les deux réels a et b sont alors appelés les **termes** de cette somme.

(2) Le nombre réel noté $a-b$ est appelé la **différence de a et de b**. Les deux réels a et b sont alors appelés les **termes** de cette différence. Ce nombre est défini comme la somme de a et de l'**opposé** de b, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a-b=a+(-b)}$$

(3) Le nombre réel noté $a \times b$ (ou plus simplement ab) est appelé le **produit de a par b**. Les deux réels a et b sont alors appelés les **facteurs** de ce produit.

(4) Lorsque $b \neq 0$, le nombre réel $\frac{a}{b}$ est appelé le **quotient de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$**. Le réel a s'appelle alors le **numérateur** et le réel b s'appelle le **dénominateur**. Ce nombre est défini comme le produit de a par l'**inverse** de b, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$$

Lorsque les nombres a et b sont entiers, ce nombre $\frac{a}{b}$ est appelé **fraction**.

Remarque 4

Dans la définition 3 précédente :

(1) Comme défini dans le (2), « soustraire » c'est « ajouter l'opposé ».

(2) Comme défini dans le (4), « diviser » c'est « multiplier par l'inverse ».

Propriété 4

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

(1) La somme (ou **addition**) de nombres réels est **commutative**, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a + b = b + a}$$

La somme de nombres réels est **associative**, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

On note donc cette somme plus simplement $\boldsymbol{a + b + c}$.

Le nombre 0 est appelé l'**élément neutre pour la somme**, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a}$$

Chaque nombre réel a possède un **opposé**, noté $\boldsymbol{-a}$ (ce qui légitime la définition de la différence de deux nombres réels vue dans le (2) de la définition 2), défini par :

$$\boldsymbol{a + (-a) = -a + a = 0}$$

(2) L'opposé du nombre réel $a - b$ est $b - a$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{-(a - b) = b - a}$$

Il y a **distributivité** du signe « $-$», c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a - (b + c) = a - b - c} \text{ et } \boldsymbol{a - (b - c) = a - b + c}$$

(3) Le produit (ou **la multiplication**) de nombres réels est **commutatif**, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a \times b = b \times a} \text{ (ou } ab = bc\text{)}$$

Le produit de nombres réels est **associatif**, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)} \text{ (ou } (ab)c = a(bc)\text{)}$$

On note donc ce produit plus simplement $\boldsymbol{a \times b \times c = abc}$.

Le nombre 1 est appelé l'**élément neutre pour le produit**, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a \times 1 = 1 \times a = a}$$

Chaque nombre réel non nul b possède un **inverse**, noté $\boldsymbol{\frac{1}{b}}$ (ce qui légitime la définition du quotient de deux nombres réels vue dans le (4) de la définition 2), défini par :

$$\boldsymbol{b \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times b = 1}$$

(4) (i) Avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$ (**réduction** d'un quotient) :

$$\boldsymbol{\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}}$$

(ii) Avec $b \neq 0$ (somme ou différence de deux quotients) :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \text{ et } \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

(iii) Avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ (produit de deux quotients) :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \text{ et } a\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}$$

(iv) Avec $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$ (inverse et quotient de deux quotients) :

$$\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{d}{c} \text{ et } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

(v) Avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ (condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux quotients) :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

(vi) Avec $b \neq 0$ (opposé d'un quotient) :

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b} \text{ et } -\frac{a+c}{b}=\frac{-a-c}{b}=-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$

<u>Remarque 5</u>

(1) L'opposé $-a$ d'un nombre réel a n'est pas nécessairement négatif. Par exemple, avec $a=-2{,}17$, le nombre $-a=2{,}17$ est positif !

(2) La différence (ou **soustraction**) ne possède aucune des propriétés de l'addition.

(3) Comme le rappelle le (4) de la propriété 4 :

- pour pouvoir additionner ou soustraire deux quotients (propriété (ii)), il est nécessaire de les **réduire au même dénominateur** (grâce à la propriété (i)) ;
- la deuxième formule du (iii) est une conséquence de la première puisque :

$$a\times\frac{c}{d}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{1\times d}=\frac{ac}{d}$$

- l'inverse du quotient $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$ puisque :

$$\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{d}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{cd}{cd}=1$$

- diviser par un quotient revient à multiplier par son inverse (propriété (iv)) ;
- deux fractions sont égales si, et seulement si, leurs **produits en croix** sont égaux (propriété (v)) ;
- l'opposé du quotient $\frac{a}{b}$ est $\frac{-a}{b}$ ou encore $\frac{a}{-b}$ puisque (propriété (vi)) :

$$\frac{-a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a-a}{b}=\frac{0}{b}=0 \text{ et } \frac{-a}{b}=\frac{-a\times(-1)}{b\times(-1)}=\frac{a}{-b}$$

- **un trait de fraction sous-entend des parenthèses**, ainsi (propriété (vi)) :

$$-\frac{a+c}{b}=-\frac{(a+c)}{b}=\frac{-(a+c)}{b}=\frac{-a-c}{b}=\frac{-a}{b}-\frac{c}{b}=-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$

<u>Exemple 4</u>

(1) Calculer mentalement $S=47+48+49+50+51+52+53$ et $P=32\times25\times7$.

(2) Simplifier les expressions $A(x)=x-1+(1-x)$ et $B(x)=x-1-(1-x)$.

(3) Simplifier les quotients suivants :

$$A=\frac{24}{30},\ B=\frac{2x^2}{4x} \text{ (avec } x \text{ un réel non nul)},\ C=\frac{24}{120} \text{ et } D=\frac{5+2}{3+2}$$

(4) Calculer :

$$A=\frac{3}{5}+\frac{2}{7},\ B=\frac{3}{4}-\frac{11}{6},\ C=\frac{n+1}{2}-\frac{2n+3}{10} \text{ (avec } n \text{ un entier naturel)},\ C=3\times\frac{5}{4},\ D=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4},\ E=\frac{12}{25}\div\frac{18}{125}$$

2.2. Puissances d'un nombre réel, écriture scientifique et ordres de grandeur

Définition 4

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

(1) Le nombre a^n, qui se lit « $\boldsymbol{a}$ **puissance** $\boldsymbol{n}$ » ou « $\boldsymbol{a}$ **exposant** $\boldsymbol{n}$ », est défini par le produit :

$$a \times a \times \ldots \times a, \text{ où le facteur } a \text{ apparaît } n \text{ fois}$$

L'entier n s'appelle alors l'**exposant**.

(2) Avec de plus $a \neq 0$, l'inverse du nombre réel a^n est noté a^{-n} et ainsi :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \ldots \times a}, \text{ où le facteur } a \text{ apparaît } n \text{ fois au dénominateur}$$

Remarque 6

(1) Avec a un nombre réel quelconque, on a par convention $a^0 = 1$. (En particulier $0^0 = 1$.)

(2) Avec a un nombre réel quelconque, on a aussi $a^1 = a$.

(3) Avec les notations du (2) de la définition 4 précédente, lorsque le nombre a est nul, le nombre a^{-n} n'est pas défini puisque l'inverse de 0 n'existe pas.

Propriété 5

Soient a et b deux nombres réels, m et n deux nombres entiers naturels.

(1) $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

(2) Avec $a \neq 0$, $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

(3) $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \times n}}$

(4) $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

(5) Avec $b \neq 0$, $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Remarque 7

La propriété 5 reste valable avec des exposants négatifs (c'est-à-dire avec m et n des entiers relatifs), à condition que les nombres réels a et b soient non nuls.

Exemple 5

Mettre les nombres suivants sous la forme a^k, où a est un entier naturel et k un entier relatif :

$$A = \left(\frac{5^8 \times 5^{-2}}{5^{-10}}\right)^2, \; B = \frac{\left(7^{4-2n}\right)^5 \times 49}{7^n} \text{ (où } n \text{ est un entier relatif)}$$

Définition (et propriété) 5

La **notation scientifique** d'un nombre décimal non nul d est de la forme :

$$\boldsymbol{d = \pm a \times 10^n}$$

Où a est un nombre décimal de l'intervalle $[1\,;10[$ appelé **mantisse** et n un nombre entier relatif appelé **exposant**.

L'**ordre de grandeur** du nombre décimal d est alors égal à :

$$\begin{cases} 10^n \text{ si } a \in [1\,;5[\\ 10^{n+1} \text{ si } a \in [5\,;10[\end{cases}$$

Exemple 6

Donner la notation scientifique des nombres décimaux suivants, puis en donner un ordre de grandeur :

$A = 634\,000\,000$; $B = -0{,}000\,000\,000\,456$; $C = 0{,}0421 \times 10^4$; $D = -0{,}56 \times 10^{-2}$; $E = \frac{5\times10^{-5}\times7{,}2\times10^3}{1{,}5\times10^4}$.

2.3. Racine carrée

Définition (et propriété) 6

Soit a un nombre réel **positif ou nul**. Il existe un unique nombre réel **positif ou nul** dont le carré est égal à a. Ce nombre est appelé **racine carrée de $\boldsymbol{a}$** et se note $\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Le symbole « $\sqrt{}$ » est appelé « radical ».

Exemple 7

$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et 3 est positif ou nul ; $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ car $0{,}1^2 = 0{,}01$ et $0{,}1$ est positif ou nul ;
$\sqrt{\pi^2} = \pi$ car ($\pi^2 = \pi^2$ et) π est positif ou nul ; $\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$ et 1 est positif ou nul ;
$\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$ et 0 est positif ou nul ; $\sqrt{-4}$ n'existe pas car $-4 < 0$ (il n'y a pas de nombre réel dont le carré est égal à -4 !).

Remarque 8

Soit a un nombre réel positif ou nul. Il y a deux nombres réels qui élevés au carré donnent a : ces deux nombres sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. On a alors :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Propriété 6

Soit a un nombre réel. On a :

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a\ si\ a \geq 0} \\ \boldsymbol{-a\ si\ a} < 0 \end{cases}$$

Remarque 9

On rappelle que la notation $|a|$ désigne la **valeur absolue** du nombre réel a.

Propriété 7

Soient a et b deux nombres réels positifs ou nuls.

(1) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

(2) Avec $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(3) Avec $a \neq 0$, $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ et $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Remarque 10

Attention, de manière générale $\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} \neq \sqrt{\boldsymbol{a}} + \sqrt{\boldsymbol{b}}$!

En effet, par exemple avec $a = 16$ et $b = 9$, on a $\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \end{cases}$, et $5 \neq 7$!

Exemple 8

(1) Simplifier les racines carrées suivantes (c'est-à-dire écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ le plus petit possible) :

$$A = \sqrt{45}, B = \sqrt{2000}$$

(2) Calculer (on veut le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$) :

$$C = 2\sqrt{6} - \sqrt{96} + 5\sqrt{24} - 2\sqrt{54}$$

(3) Développer et simplifier l'expression suivante :

$$D = (\sqrt{6} + 2)(5\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

(4) Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$E = \frac{8+3\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \text{ et } F = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$$

2.4. Priorités opératoires

Afin de mener à bien un calcul, on effectue les opérations dans l'ordre suivant :

- on effectue d'abord les calculs des expressions entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus à l'intérieur ;
- on effectue ensuite les calculs de puissances avant les multiplications, divisions, additions et soustractions ;
- on effectue ensuite les multiplications et divisions avant les additions et soustractions ;
- on termine enfin par les additions et soustractions.

Remarque 11

Attention à ces priorités ! Soient x et y deux nombres réels.

(1) On a $3 + 2 \times 5 = 3 + 10 = 13$ et non pas $5 \times 5 = 25$! On ne peut d'ailleurs pas réduire l'expression $3 + 2x$!

(2) On a $8 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$ et non pas $40^3 = 64000$! On ne peut pas transformer le nombre $8x^3$, sauf peut-être à écrire $8x^3 = 2^3x^3 = (2x)^3$.

(3) On a par exemple $(3 + 2)y = 5y$, mais on ne peut pas réduire $(3 + 2x)y$!

Exemple 9

Calculer :

$$A = 5 - 2 \times \frac{3}{7}, B = 6^2 + 13 - 5 \times 2, C = 2 + 3 \times 10^2 - 5 \times 10 + 8, D = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 4 + 2 \times \frac{6}{5}, E = \frac{2\times(4-2)}{3^2\times 2^2}$$

$$F = 1 - \left((3 - 2^3) - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{8-2}{5+2}$$

2.5. Développer ou factoriser une expression littérale, identités remarquables

Définition 7

- Une expression littérale est appelée somme (respectivement différence) si la dernière opération que l'on fait, lorsque l'on donne une valeur à la variable, est une somme (respectivement une différence). Elle portera le nom de produit si, de la même manière, la dernière opération effectuée est un produit.

- **Développer** une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme (respectivement une différence).
- **Factoriser** une expression littérale, c'est transformer une somme (respectivement une différence) en un produit.

Remarque 12

Pour développer ou factoriser une expression littérale, on utilise les formules données dans les propriétés 8 et 9 suivantes, dans « un sens ou l'autre ».

Propriété 8

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

(1) Il y a **distributivité** de la multiplication sur l'addition, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a \times (b+c) = (b+c) \times a = a \times b + a \times c} \text{ (\textbf{distributivité simple})}$$

(2) On obtient grâce à la formule précédente :

$$\boldsymbol{(a+b) \times (c+d) = (c+d) \times (a+b) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d} \text{ (\textbf{distributivité double})}$$

Remarque 13

(1) Dans la propriété précédente, la deuxième formule est obtenue en appliquant deux fois de suite la première :

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd$$

(2) La multiplication est aussi distributive sur la soustraction :

$$\boldsymbol{a \times (b-c) = (b-c) \times a = a \times b - a \times c}$$

(3) Lorsqu'on développe une expression littérale, il est facile de ne pas se tromper dans la gestion des signes : il suffit de transformer les soustractions en additions. Par exemple, avec x un nombre réel, il suffit de remarquer que $8(2-x) = 8\big(2+(-x)\big)$.

Propriété 9

Soient a et b deux nombres réels. On rappelle les identités remarquables vues dans les classes précédentes :

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

Exemple 10

(1) Calculer mentalement $A = 999^2$ et $B = 38 \times 42$.

(2) Les expressions suivantes sont-elles des produits ou des sommes ? (On pourra s'aider au besoin d'un arbre de calcul.)

$A(x) = x(3-5x), B(x) = (2x+3)(x-5), C(x) = 6x^2 + 12x, D(x) = (x+1)^2 - 3x - 3,$
$E(x) = (3x+2)^2 - 5x - 7, F(x) = -6x + 4 - (1-5x)^2, G(x) = 9x^2 - 6x + 1, H(x) = 4x^2 - 8$.

(3) Développer et réduire les expressions $A(x), B(x), E(x)$ et $F(x)$.

(4) Factoriser les expressions $C(x), D(x), G(x)$ et $H(x)$.

3. Équations et inéquations des premier et second degrés

3.1. Généralités

Propriété 10

Soient six réels a, a', b, b', x et x'. On a les résultats suivants :

(1) $$\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow a + c = b + c}$$

(2) La **relation d'ordre dans** $\mathbb{R}$ est **compatible avec l'addition** :

$$\boldsymbol{a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c}$$

En particulier :

$$\boldsymbol{a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \text{ et } a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq 0}$$

On peut ajouter membre à membre des inégalités :

$$\boldsymbol{\begin{cases} a \leq x \leq b \\ a' \leq x' \leq b' \end{cases} \Rightarrow a + a' \leq x + x' \leq b + b'}$$

(3) La **relation d'ordre dans** $\mathbb{R}$ est **compatible avec le produit :**

$$\boldsymbol{\begin{cases} a \leq b \\ c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ac \leq bc \text{ et } \begin{cases} a \leq b \\ c \leq 0 \end{cases} \Rightarrow ac \leq bc}$$

On peut multiplier membre à membre des inégalités dès lors que ces membres sont **positifs** :

$$\boldsymbol{\begin{cases} 0 \leq a \leq x \leq b \\ 0 \leq a' \leq x' \leq b' \end{cases} \Rightarrow aa' \leq xx' \leq bb'}$$

Remarque 14

Certaines de ces propriétés vont nous être utiles pour résoudre certaines équations et inéquations.

Propriété 11

Soient a et b deux nombres réels. On a :

$$\boldsymbol{a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0}$$

On dit que l'ensemble des nombres réels est **intègre**.

Remarque 15

(1) La réciproque de cette implication est évidemment vraie ! Avec a et b deux nombres réels, on a ainsi :

$$\boldsymbol{a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0}$$

(2) Cette propriété 11 se généralise aisément à un produit de n nombres réels, avec n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(3) Cette propriété 11 va nous être utile pour résoudre des équations produits.

(4) Comme nous le verrons plus tard, cette implication de la propriété 11 ne va pas soi dans tous les ensembles !

Définition 8

Une équation (respectivement une inéquation) est une égalité (respectivement une inégalité) contenant une (ou plusieurs) variable(s) appelée(s) inconnue(s).

Résoudre une équation (respectivement une inéquation), c'est déterminer les valeurs de l' inconnue (ou des inconnues) pour lesquelles l'égalité (respectivement l'inégalité) est vraie.

3.2. Équations et inéquations du premier degré

Remarque 16
Pour résoudre de telles (in)équations, il suffit d'isoler x (en deux étapes bien connues depuis le collège !) dans un des deux membres de l'(in)égalité en utilisant la propriété 10.

Exemple 11
On considère les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1): -7x + 3 = \frac{1}{2}x - 9\ , (E_2): -\frac{11}{2} = \frac{3}{4}b + 8\ , (I_3): 2x + 3 < 4x + 7 \text{ et } (I_4): \frac{5t+4}{6} \geq \frac{-t+7}{3}$$

(1) Le nombre 0 est-il solution de (E_1) ? Le nombre 1 est-il solution de (I_4) ?
(2) Résoudre ces équations et inéquations.

3.3. Équations et inéquations produits et quotients

Remarque 17
Pour résoudre une équation produit :
- 1$^{\text{ère}}$ étape : on se ramène à un membre de droite (ou de gauche) égal à zéro ;
- 2$^{\text{ème}}$ étape : on factorise l'expression algébrique au maximum (l'idéal étant d'obtenir des expressions analytiques de fonctions affines) ;
- 3$^{\text{ème}}$ étape : on utilise la propriété 11 ;
- 4$^{\text{ème}}$ étape : on résout les équations obtenues (dans l'idéal, ce sont des équations linéaires du premier degré) parallèlement ;
- 5$^{\text{ème}}$ étape : on conclut en prenant garde à une éventuelle restriction de l'ensemble de validité de l'équation donnée par l'énoncé ou l'équation elle-même.

Exemple 12
Résoudre les équations suivantes :

$$(E_5): (7x - 2)^2 - 1 = 80 \text{ et } (E_6): (5x + 2)(2x - 3) = 4x^2 - 12x + 9$$

Remarque 18
Pour résoudre une équation quotient :
- 1$^{\text{ère}}$ étape : on cherche l'ensemble de validité de l'équation ;
- 2$^{\text{ème}}$ étape : on se ramène à un membre de droite (ou de gauche) égal à zéro et on réduit au même dénominateur, ou bien on se ramène à deux fractions égales ;
- 3$^{\text{ème}}$ étape : on utilise la propriété 12 qui suit ;
- 4$^{\text{ème}}$ étape : on résout l'équation produit ou l'équation du 1$^{\text{er}}$ degré obtenue ;
- 5$^{\text{ème}}$ étape : on conclut en prenant garde aux valeurs interdites ou à une éventuelle restriction de l'ensemble de validité de l'équation donnée par l'énoncé.

Propriété 12

Soient quatre expressions algébriques définies sur un intervalle réel I notées $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ et $a_4(x)$.

On a :

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(x) = 0 \\ a_2(x) \neq 0 \end{cases}$$

Autrement dit, un quotient d'expressions algébriques de la variable réelle est nul si, et seulement si, son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

On a également :

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \frac{a_3(x)}{a_4(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2(x) \neq 0 \\ a_4(x) \neq 0 \\ a_1(x) \times a_4(x) = a_2(x) \times a_3(x) \end{cases}$$

Exemple 13

Résoudre les équations suivantes :

$$(E_7): \frac{3}{x-2} - \frac{7}{x+2} - \frac{1}{x^2-2} = 0 \text{ , } (E_8): \frac{2x+3}{x+7} = \frac{x+7}{2x+3} \text{ et } (E_9): \frac{2}{3-x} + \frac{3}{9-x^2} = 1$$

Remarque 19

Pour résoudre une inéquation produit :

- 1ère étape : on se ramène à un membre de droite (ou de gauche) égal à zéro ;
- 2ème étape : on factorise l'expression algébrique au maximum (l'idéal étant d'obtenir des expressions analytiques de fonctions affines) ;
- 3ème étape : on utilise la propriété 13 qui suit ainsi que la règle des signes, dans un tableau de signes, pour étudier le signe du produit obtenu ;
- 4ème étape : on conclut en prenant garde à une éventuelle restriction de l'ensemble de validité de l'inéquation donnée par l'énoncé ou l'équation elle-même.

Propriété 13

Soit $f: x \longmapsto f(x) = ax + b$ une fonction affine sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas la fonction nulle.

- **1er cas : $a > 0$**

f admet le tableau de signes suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

- **2ème cas : $a < 0$**

f admet le tableau de signes suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

- **3ème cas : $a = 0$**

f est du signe strict de b sur $\mathbb{R}$.

Démonstration de la propriété 13 :

Exemple 14
Résoudre les inéquations suivantes :
$$(I_{10}):(2x-1)(21x+2)>2(2x-1)(7x+4) \text{ et } (I_{11}):1\geq x^4$$

Remarque 20
Pour résoudre une inéquation quotient :
- 1ère étape : on cherche l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- 2ème étape : on se ramène à un membre de droite (ou de gauche) égal à zéro ;
- 3ème étape : on réduit au même dénominateur pour se ramener à une seule fraction et on factorise au maximum numérateur et dénominateur (l'idéal étant d'obtenir des expressions analytiques de fonctions affines) ;
- 4ème étape : on utilise la propriété 13 ainsi que la règle des signes, dans un tableau de signes, pour étudier le signe du quotient obtenu ;
- 5ème étape : on conclut en prenant garde aux valeurs interdites ou à une éventuelle restriction de l'ensemble de validité de l'inéquation donnée par l'énoncé.

Exemple 15
Résoudre les inéquations suivantes :
$$(I_{12}):\frac{x}{8x-3}>\frac{5}{2} \text{ et } (I_{13}):\frac{3x-4}{7-9x}\geq\frac{7-9x}{3x-4}$$

3.4. Équations et inéquations du second degré

Définition 9
On appelle fonction **polynôme du second degré** ou **fonction polynomiale du second degré** ou encore fonction **trinôme du second degré**, toute fonction f définie a priori sur $\mathbb{R}$ par le nombre :
$$f(x)=ax^2+bx+c$$
Où a, b et c sont des nombres réels fixés avec $a\neq 0$.

Exemple 16
Les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^2+\frac{1}{2}x+8$, $g(x)=x^2-\sqrt{2}x$ et $h(x)=2x^2-\frac{1}{3}$ sont des fonctions trinômes du second degré.

Remarque 21
(1) L'expression analytique d'une fonction trinôme du second degré (ou d'une fonction polynomiale en général) ne présente aucune valeur interdite, ce qui explique qu'une telle fonction est définie a priori sur $\mathbb{R}$. Cependant, dans un problème de modélisation (comme par exemple dans celui de l'introduction), des restrictions peuvent être apportées à son ensemble de définition.
(2) La fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$, est une fonction trinôme du second degré particulière (avec $b=c=0$ et $a=1$ dans la définition 1).

(3) L'expression analytique $ax^2 + bx + c$ donnée dans la définition 9 est appelée **forme développée réduite** da la fonction trinôme du second degré. Il existe d'autres formes d'une telle fonction, comme nous allons le voir dans la suite.

Propriété (et définition) 14

L'expression analytique d'une fonction trinôme du second degré peut toujours se mettre sous la forme :

$$a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Où α et β sont des réels qui dépendent des réels a, b et c (avec les notations de la définition 9).

Cette expression est appelée la **forme canonique** de cette fonction.

On retiendra les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\alpha = -\frac{b}{2a}} \text{ et } \boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$$

Démonstration de la propriété 14 :

Exemple 17

Les expressions $3(x-2)^2 + 8$, $(x+9)^2$, $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 - \pi$ et $-\frac{1}{3}x^2 + 2$ sont des formes canoniques de fonctions trinômes du second degré.

Propriété 15

Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$. Avec les notations précédentes, on a :

- si $a > 0$, la fonction f admet sur $\mathbb{R}$ le minimum de β atteint en α ;
- si $a < 0$, la fonction f admet sur $\mathbb{R}$ le maximum de β atteint en α.

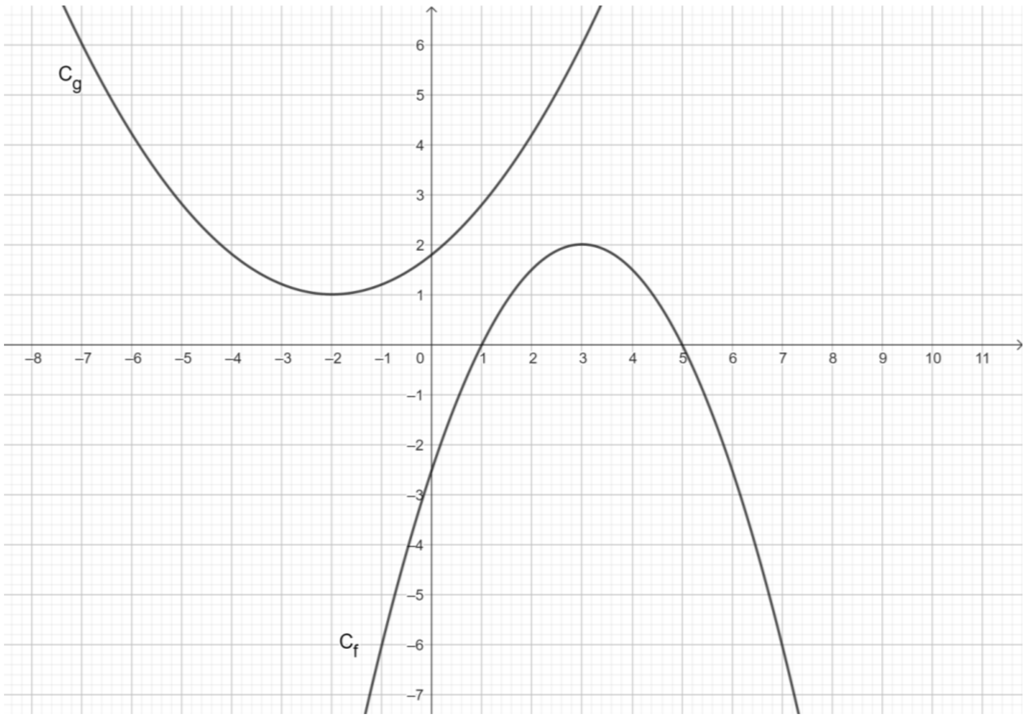
Démonstration de la propriété 14

Propriété (et définition) 16

Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan est, avec les notations précédentes, la **parabole** de **sommet** $\boldsymbol{S(\alpha, \beta)}$, **d'axe de symétrie** la **droite d'équation** $\boldsymbol{x = \alpha}$, « tournée vers le **haut** » lorsque $\boldsymbol{a} > 0$ et « tournée vers le **bas**» lorsque $\boldsymbol{a} < 0$.

Exemple 18

Soient les fonctions trinômes du second degré f et g définies sur $\mathbb{R}$ dont les paraboles représentatives C_f et C_g sont représentées ci-dessous dans un repère orthogonal du plan :



Déterminer les formes développées réduites de ces deux fonctions.

Définition 10
Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$. On appelle **racine de f** (ou **zéro de f**) tout antécédent de 0 par f, c'est-à-dire tout nombre réel r tel que $f(r) = 0$.

Exemple 19
Par exemple, le nombre -1 est une racine de la fonction trinôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$, puisque $f(-1) = 0$.

Remarque 22
(1) Le terme « racine de f » est réservé aux fonctions polynomiales en général, alors que le terme « zéro de f » s'emploie pour n'importe quelle fonction.
(2) Comme nous allons le rappeler, une fonction trinôme du second degré admet un nombre de racines inférieur ou égal à 2.

Définition 11
Avec les notations précédentes, on pose (E) l'**équation du second degré** $f(x) = 0$ (c'est-à-dire $\boldsymbol{(E): ax^2 + bx + c = 0}$). On appelle **discriminant de l'équation (E)**, ou **discriminant de la fonction trinôme du second degré f**, le nombre Δ (la lettre delta majuscule de l'alphabet grec) défini par :

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Propriété (et définition) 17

Avec les notations précédentes :

1[er] cas : $\boldsymbol{\Delta > 0}$

La fonction f admet la forme factorisée suivante :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Avec :

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ et } \boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

L'équation (E) admet alors **exactement deux solutions** qui sont les nombres réels x_1 et x_2.

La fonction f admet ainsi **exactement deux racines réelles distinctes** qui sont x_1 et x_2.

2[ème] cas : $\boldsymbol{\Delta = 0}$

La fonction f admet la forme factorisée suivante :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$$

Avec :

$$\boldsymbol{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

L'équation (E) admet alors **une unique solution** qui est le nombre réel x_0.

La fonction f admet ainsi **une unique racine réelle** (dite « racine double ») qui est x_0.

3[ème] cas : $\boldsymbol{\Delta < 0}$

La fonction f n'admet **pas de forme factorisée** (dans $\mathbb{R}$).

L'équation (E) n'admet **aucun nombre réel solution**.

La fonction f n'admet **aucune racine réelle**.

Démonstration de la propriété 17 :

Exemple 20

(1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ (on ne calculera un discriminant que lorsque cela est nécessaire) :

$$(E_1): 4x + 70 = 2x^2; (E_2): 2x^2 = 8; (E_3): x^2 + 2x = 0; (E_4): -3x^2 = 4; (E_5): -\frac{1}{2}x^2 - 3x = \frac{9}{2} \text{ ;}$$
$$(E_6): x^6 - 26x^3 - 27 = 0$$

(2) Donner le nombre de racines et la forme factorisée, si elle existe, des fonctions trinômes du second degré suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f_1: x \longmapsto f_1(x) = -x^2 + x + 2 \text{ ; } f_2: x \longmapsto f_2(x) = 2x^2 + 3 \text{ et } f_3: x \longmapsto f_1(x) = -x^2 + 8x - 16$$

Remarque 23

(1) Il existe un ensemble de nombres, contenant l'ensemble des nombres réels, appelé ensemble des nombres complexes. Une fonction trinôme du second degré à discriminant strictement négatif admet deux racines complexes, mais ceci n'est pas au programme de la filière ECT.

(2) Dans le cas où le discriminant est nul, on parle de « racine double » du fait que la forme factorisée obtenue dans ce cas est celle du cas où le discriminant est strictement positif mais avec $x_1 = x_2$.

En effet, avec les notations du 1[er] cas de la propriété 17 ci-dessus, avec $x_1 = x_2$ et en posant x_0 cette valeur commune, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2$$

Propriété 18 (**relations coefficients-racines**)

Avec les notations de la propriété 17 précédente, dans le cas où le discriminant est strictement positif, on a :

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \text{ et } \boldsymbol{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

On a de même dans le cas où le discriminant est nul :

$$x_0 + x_0 = 2x_0 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_0 x_0 = x_0^2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration de la propriété 18 :

Exemple 21

(1) Trouver une solution évidente de l'équation (E_6): $4x^2 - 8x - 12 = 0$. En déduire l'ensemble solution de cette équation dans $\mathbb{R}$.

(2) Trouver une racine évidente de la fonction trinôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 7x - 18$$

En déduire la forme factorisée de f. Tracer l'allure de la parabole représentative de f dans un repère du plan après avoir déterminé sa forme canonique.

Propriété 19 (signe d'une fonction trinôme du second degré)

Avec les notations précédentes :

1er cas : $\mathbf{\Delta > 0}$

Quitte à réindicer les deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, supposons que $x_1 < x_2$.
La fonction f s'annule en x_1 et x_2, , est du signe strict de a sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et est du signe strict opposé de a sur l'intervalle $]x_1; x_2[$.

2ème cas : $\mathbf{\Delta = 0}$

La fonction f s'annule en x_0 et est du signe strict de a sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$.

3ème cas : $\mathbf{\Delta < 0}$

La fonction f ne s'annule pas et est du signe strict de a sur $\mathbb{R}$.

Exemple 22

(1) Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_7): 3x^2 - 6x > -3 \text{ et } (I_8): 2x^2 + 3x - 5 \leq 0$$

(2) Après avoir déterminer son ensemble de définition, déterminer le signe de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{x(-3x^2 + 9x + 30)}{x - 1}$$