Analyse - cours n°1 : suites numériques, premières sommes

1. Généralités

1.1. Définition

Définition 1

Une **suite numérique** réelle u est une fonction qui à tout entier naturel n associe un unique nombre réel $u(n)$, que l'on préfèrera noter u_n. On parle alors de la suite $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n\in\mathbb{N}}}$, ou de manière moins précise de la suite (u_n).
On peut aussi voir une suite numérique u comme un ensemble discret de nombres réels, ordonné et a priori infini. On peut ainsi noter :

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0;\ u_1;\ u_2; \dots ; u_n; \dots)$$

Pour tout entier naturel n, le nombre réel u_n, qui est l'image de l'entier naturel n par u et qui se lit « u indice n », est appelé le **terme de rang $\boldsymbol{n}$** (ou d'indice n) de la suite u.
Le nombre réel u_0 est appelé le **terme initial** de la suite u.

Remarque 1

(1) On veillera à ne pas confondre (u_n) et u_n qui ne désignent pas le même objet !
(2) Parfois, une suite n'est définie qu'à partir d'un certain entier naturel p non nul. On parle alors de la suite $(u_n)_{n\geq p}$ de terme initial u_p.
Si par exemple, une suite u n'est définie qu'à partir du rang 1, on parle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (ou de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$) de rang initial u_1. On a alors $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_1;\ u_2; \dots ; u_n; \dots)$.

Définition 2

Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont dites **égales à partir du rang $\boldsymbol{q}$** (où q est un entier naturel), lorsque **pour tout entier naturel $\boldsymbol{n \geq q}$** :

$$\boldsymbol{u_n = v_n}$$

Remarque 2

Très souvent, il n'est pas utile de faire une fixation sur le rang initial d'une suite, les propriétés globales de cette dernière étant surtout intéressantes **à partir d'un certain rang**.

1.2. Différents types de suites

1.2.1 Suites définies explicitement (du type $u_n = f(n)$)

Exemple 1

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\geq 4}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n+2}{n}$$
$$\forall n \in [\![4\,;+\infty[\![, w_n = \sqrt{n-4}$$

Ici, le terme d'indice n de chacune des suites s'exprime directement en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$$

Avec f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, par $f(x)=x^2+1$.
L'égalité « $u_n=n^2+1$ » est appelée **formule explicite** de la suite u.
Calculer les 3 premiers termes de chacune de ces trois suites et donner les fonctions numériques g et h qui définissent explicitement les deux suites v et w respectivement.

<u>1.2.2. Suites définies par récurrence</u> (du type $u_{n+1}=f(u_n)$)

<u>Exemple 2</u>
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2-1 \end{cases}$$

Ici, le nombre u_{n+1} s'exprime en fonction du terme précédent u_n :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$$

Avec f la fonction numérique (appelée fonction de transition) définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$.
L'égalité « $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2-1$ » est appelée **formule de récurrence** de la suite v.
Calculer les 3 termes u_1, u_2 et u_3.

<u>Remarque 3</u>
Avec un suite définie explicitement, on peut calculer directement n'importe quel terme. Par exemple, avec la suite v de l'exemple 1, on a directement $v_{100}=\frac{(100+2)}{100}=\frac{102}{100}=1{,}02$.
Par contre, avec une suite définie par récurrence, pour calculer un terme, il faut a priori calculer tous les termes précédents !

<u>1.2.3. D'autres types de suites</u>

<u>Exemple 3</u>
Considérons les suites u et v définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\int_0^1 (t-3)^n\,dt$$

$$v=(2;3;5;7;11;13;\dots)$$

On dit que la suite u est définie implicitement (à l'aide d'une intégrale). Nous aurons l'occasion d'étudier de telles suites plus tard dans l'année.
La suite v est la suite des nombres premiers. Il n'existe pas de relation générale reliant n et v_n , ou v_{n+1} et v_n, c'est d'ailleurs pour cela que ces nombres sont très utilisés en cryptographie.

1.3. Monotonie d'une suite

<u>Définition 3</u>
Soit (u_n) une suite numérique et $q\in\mathbb{N}$.
(1) On dit que (u_n) est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) **à partir du rang q** lorsque :

$$\forall \boldsymbol{n}\in [\![\boldsymbol{q}\,;+\infty[\![, \boldsymbol{u_{n+1}}\geq \boldsymbol{u_n} \text{ (respectivement } \boldsymbol{u_{n+1}}>\boldsymbol{u_n})$$

(2) On dit que (u_n) est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) **à partir du rang q** lorsque :

$$\forall \boldsymbol{n}\in [\![\boldsymbol{q}\,;+\infty[\![, \boldsymbol{u_{n+1}}\leq \boldsymbol{u_n} \text{ (respectivement } \boldsymbol{u_{n+1}}<\boldsymbol{u_n})$$

(3) On dit que (u_n) est **constante** (ou **stationnaire**) **à partir du rang q** lorsque :

$$\forall \boldsymbol{n} \in [\![\boldsymbol{q} \,; +\infty[\![, \boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n}$$

(4) Lorsque la suite (u_n) n'est **ni croissante, ni décroissante**, on dit qu'elle n'est **pas monotone**.

Remarque 4

(1) Une suite n'est pas nécessairement monotone (respectivement strictement monotone), c'est-à-dire croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante), à partir de son terme initial, d'où l'introduction du rang q dans la définition précédente.

(2) Avec les notations de la propriété précédente, lorsqu'une suite(u_n) est constante à partir du rang q, on montre facilement que :

$$\forall n \in [\![q \,; +\infty[\![, u_n = u_q$$

(3) Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. C'est la méthode qui nous vient à l'idée en premier au regard de la définition précédente, mais il en existe d'autres, comme nous le verrons plus tard.

Exemple 4

(1) Déterminer le sens de variation de suites (u_n) et (v_n) de l'exemple 1.

(2) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.

(3) Considérons la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = z_n(z_n + 1) + 3 \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est strictement croissante à partir du rang 0.

2. Suites usuelles

2.1. suites arithmétiques

Définition 4

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un **nombre réel r**, **indépendant de n**, tel que :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{r}$$

Le nombre réel r est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = -\frac{1}{4}n + 7$$
$$v_n = -3 \times 2^n$$
$$w_{n+1} = 3 + w_n$$

Ces suites sont-elles arithmétiques ? Justifier !

Remarque 5

(1) Autrement dit, une suite est dite arithmétique lorsqu'un terme est obtenu à partir du précédent en ajoutant toujours le même nombre réel indépendant de n.

(2) Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, le nombre $u_{n+1} - u_n$ est constant égal à un nombre réel r indépendant de n.

(3) Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de trouver un entier naturel k tel que :

$$u_{k+2} - u_{k+1} \neq u_{k+1} - u_k$$

<u>Propriété 1</u> (une formule explicite)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et r un nombre réel.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si, et seulement si, **pour tout entier naturel n** :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$$

<u>Conjecture du sens direct, démonstration de la réciproque :</u>

<u>Propriété 2</u> (généralisation de la propriété 1)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et r un nombre réel.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si, et seulement si, **pour tous entiers naturels n et p** :

$$\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$$

<u>Conjecture du sens direct, démonstration de la réciproque :</u>

<u>Exemple 6</u>
(1) On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme -7. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre u_n en fonction de n.
(2) On considère une suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_{30} = -55$ et $v_{50} = -95$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre v_n en fonction de n.

<u>Remarque 6</u>
Une suite arithmétique est certes définie a priori par récurrence, mais il est également possible de lui trouver, grâce aux deux propriétés précédentes, une formule explicite !

<u>Propriété 3</u> (sens de variation d'une suite arithmétique)
Soient $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
(1) Si $r > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 0.
(2) Si $r < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir du rang 0.
(3) Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à son premier terme u_0.

<u>Démonstration :</u> évidente puisque, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$.

<u>Exemple 7</u>
Dans l'exemple 6 précédent, la suite u est strictement croissante à partir du rang 0, étant donné que sa raison est strictement positive, puisqu'elle est égale à $\frac{1}{3}$. De même, la suite v est strictement décroissante à partir du rang 0, étant donné que sa raison est strictement négative, puisqu'elle est égale à -2.

<u>Remarque 7</u>
Certaines suites arithmétiques ne sont définies qu'à partir d'un certain entier naturel p non nul. Le lecteur prendra soin d'adapter dans ce cas les définitions et propriétés précédentes.

2.2. suites géométriques

Définition 5
Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un **nombre réel q, indépendant de n**, tel que :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$$

Le nombre réel q est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 8
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n$$
$$v_n = 3n(n+1)$$
$$w_{n+1} = -2 \times 3^{2n}$$

Ces suites sont-elles géométriques ? Justifier !

Remarque 8
(1) Autrement dit, une suite est dite géométrique lorsqu'un terme est obtenu à partir du précédent en multipliant toujours par le même nombre réel indépendant de n.
(2) Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, le nombre u_{n+1} est le produit du nombre u_n par un nombre réel q indépendant de n.
Ou, si on parvient à démontrer d'emblée qu'aucun terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est nul, on peut aussi démontrer que, pour tout entier naturel n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant égal à un nombre réel q indépendant de n.
(3) Pour démontrer qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de trouver un entier naturel k tel que :

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \neq \frac{u_{k+1}}{u_k} \text{ (avec } u_{k+1} \neq 0 \text{ et } u_k \neq 0\text{)}$$

Propriété 4 (une formule explicite)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et q un nombre réel.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si, et seulement si, **pour tout entier naturel n** :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$$

Conjecture du sens direct, démonstration de la réciproque :

Propriété 5 (généralisation de la propriété 4)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et q un nombre réel non nul.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si, et seulement si, **pour tous entiers naturels n et p** :

$$\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Conjecture du sens direct, démonstration de la réciproque :

Remarque 9
Avec les notations de la propriété précédente, dans le cas où $n - p < 0$, la formule n'a de sens que si $q \neq 0$!

Exemple 9

(1) On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme -4. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre u_n en fonction de n.
(2) On considère une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_4 = 160$ et $v_7 = 1280$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre v_n en fonction de n.

Remarque 10

Une suite géométrique est certes définie a priori par récurrence, mais il est également possible de lui trouver, grâce aux deux propriétés précédentes, une formule explicite !

Propriété 6 (sens de variation d'une suite géométrique)

Soient $q \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 non nul.
(1) Si $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, à partir du rang 0, strictement croissante dans le cas où $u_0 > 0$ et strictement décroissante dans le cas où $u_p < 0$.
(2) Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_0 à partir du rang 0.
(3) Si $0 < q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, à partir du rang 0, strictement décroissante dans le cas où $u_0 > 0$ et strictement croissante dans le cas où $u_p < 0$.
(4) Si $q = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 à partir du rang 1.
(5) Si $q < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Démonstration : évidente (pour les quatre premiers points) puisque, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$$

Exemple 10

Donner, en justifiant, le sens de variation des suites géométriques de l'exemple 9 précédent.

Remarque 11

Certaines suites géométriques ne sont définies qu'à partir d'un certain entier naturel p non nul. Le lecteur prendra soin d'adapter dans ce cas les définitions et propriétés précédentes.

2.3. suites arithmético-géométriques

Définition 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = a u_n + b$$

Remarque 12

Avec les notations de la définition précédente :
(1)
- Si $a = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à b à partir du rang 1 ;
- Si $a = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b ;
- Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

(2) Pour $a \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, on peut trouver une formule explicite pour une telle suite en appliquant la méthode suivante :
- on cherche la solution δ de l'équation $x = ax + b$;

- on montre que la suite $(v_n)_{n\geq p}$ définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \delta$, est géométrique de raison a ;
- on en déduit, pour tout entier naturel n, v_n puis u_n en fonction de n.

Exemple 11

Posons la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = -7$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre u_n en fonction de n. En déduire le sens de variation de cette suite.

3. Premières sommes

Propriété 7

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) $\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(2) Avec $q \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ si \ q \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ n+1 \ si \ q = 1 \end{cases}$;

Démonstration :

Remarque 13

(1) Avec les notations de la propriété 7 précédente, une somme du type « $\sum_{k=0}^{n}$ ... » contient $n+1$ termes : les n termes pour l'entier naturel k (appelé **indice de sommation**) variant de 1 à n, et le terme pour k égal à 0.

(2) Nous reviendrons plus tard sur le symbole de sommation « Σ » et ses propriétés.

Exemple 12

(1) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \ ; S_2 = 50 + 52 + 54 + \cdots + 98 + 100; \ S_3 = 7 - \frac{7}{2} + \frac{7}{4} - \cdots + \frac{7}{256}$$

(2) Exprimer les sommes suivantes en fonction de l'entier naturel n :

$$S_n = 1 - 3 + 9 - 27 + \cdots + (-1)^n 3^n \ ; \ T_n = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{5^n} \ ; R_n = \sum_{k=0}^{n}(2 - 3k)$$