Algèbre et logique - cours n°2 : éléments de logique, raisonnements mathématiques

1. Éléments de logique

1.1. Propositions (ou assertions)

Définition 1
On appelle **proposition** ou **assertion** toute phrase p ayant une valeur de vérité, vrai (V) ou faux (F), mais pas les deux !

Exemple 1
Les trois phrases suivantes sont des assertions :

p_1: « $1+1=2$ », p_2 : « $1+1=3$ », p_3 : « un triangle a quatre sommets » et p_4 : « $x+3 \geq 4$ »

La première est vraie, les deuxième et troisième sont fausses, la quatrième est vraie pour certaines valeurs de la variable x.

En revanche « $1+1-2$ », « $\sqrt{18}^3$ » et «$10x-\sqrt{y}$ » ne sont pas des assertions, puisqu'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Il s'agit simplement d'expressions arithmétiques dont la valeur est un réel, le résultat de la troisième dépendant des valeurs des variables x et y.

Remarque 1
La proposition p_4 de l'exemple 1 est vraie si, et seulement si, $x \geq 1$. Lorsque la valeur de vérité d'une proposition dépend de variables explicitement données, on fera apparaître cette dépendance. Par exemple, on préfèrera noter $p_4(x)$: « $x+3 \geq 4$ » plutôt que p_4 : « $x+3 \geq 4$ ».

1.2. Connecteurs logiques

Définition 2
Soient p et q deux propositions.
(1) On appelle **négation de p** ou **non p**, la proposition contraire de p, c'est-à-dire la proposition vraie lorsque p est fausse et fausse lorsque p est vraie.
(2) On appelle **disjonction** de p ou q, la proposition **p ou q**, c'est-à-dire la proposition vraie lorsque **l'une au moins** des propositions p ou q est vraie, et fausse lorsque p et q le sont.
(3) On appelle **conjonction** de p et q, la proposition **p et q**, c'est-à-dire la proposition vraie lorsque **les deux** propositions p et q sont vraies **à la fois**, et fausse sinon.

Exemple 2
En reprenant l'exemple 1 :
- la proposition $\overline{p_1}$ (c'est-à-dire « $1+1 \neq 2$ ») est fausse puisque la proposition p_1 est vraie ;
- la proposition p_1 ou p_2 est vraie puisque la proposition p_1 l'est ;
- la proposition p_1 et p_2 est fausse puisque la proposition p_2 l'est .

Définition 3
Soient p et q deux propositions.
L'**implication** $\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$ est définie comme la proposition qui est fausse dans le seul cas où p est vraie et q est fausse, et vraie dans tous les autres cas.

Exemple 3
Posons les propositions p: « il pleut » et q: « le ciel est nuageux ».
On a alors la proposition $p \Longrightarrow q$. En effet, cette proposition est fausse dans le seul cas où il pleut et le ciel n'est pas nuageux.

Remarque 2
(1) Lorsque « p implique q », on dira que :
- p est une condition suffisante de q (en effet, pour que la proposition q soit vraie, il suffit que p le soit ;
- q est une condition nécessaire de p (en effet, pour que la proposition p soit vraie, il est nécessaire que q le soit, dans la mesure où la véracité de p entraîne celle de q).
(2) Affirmer que « p implique q » est vraie n'implique ni que p ni que q le soit : par exemple, il est vrai que « si Aya Nakamura est présidente de la république, alors elle est cheffe des armées », pourtant Aya Nakamura n'est pas plus présidente de la république qu'elle n'est cheffe des armées.
(3) Soulignons bien le sens du symbole d'implication et reprenons l'exemple 3 précédent :
- soit il pleut (p est vraie), auquel cas le ciel est nécessairement nuageux ;
- soit il ne pleut pas (p est fausse), auquel cas le ciel peut être nuageux ou pas, cela sans remettre en cause la véracité de l'énoncé initial.

Définition 4
Soient p et q deux propositions.
On dit que les deux propositions p et q sont **équivalentes**, ce que l'on note $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$, lorsqu'on a à la fois $p \Longrightarrow q$ et $q \Longrightarrow p$.

Remarque 3
(1) L'implication $q \Longrightarrow p$ est appelée l'implication réciproque de $p \Longrightarrow q$.
(2) Lorsque les propositions p et q sont des propositions équivalentes, on dit que q est une condition nécessaire et suffisante pour p.

Exemple 4
Avec a et b deux nombres réels fixés, on a :
$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$
En effet, si $a < b$, alors en retranchant b dans les deux membres de l'inégalité, on obtient $a - b < 0$, donc on a l'implication $a < b \Rightarrow a - b < 0$.
Réciproquement, si $a - b < 0$, alors en ajoutant b dans les deux membres de l'inégalité, on obtient $a < b$, donc on a aussi l'implication $a - b < 0 \Rightarrow a < b$.
Pour résumer, avec a et b deux nombres réels fixés, $a < b$ **si, et seulement si,** $a - b < 0$.

Propriété 1 (lois de Morgan)
Soient p et q deux propositions.
(1) La proposition **contraire** de la proposition « $\boldsymbol{p}$ **ou** $\boldsymbol{q}$ » est la proposition « **non** $\boldsymbol{p}$ **et non** $\boldsymbol{q}$ » ;
(2) La proposition **contraire** de la proposition « $\boldsymbol{p}$ **et** $\boldsymbol{q}$ » est la proposition « **non** $\boldsymbol{p}$ **ou non** $\boldsymbol{q}$ ».

Exemple 5
Soient 3 points A, B et C du plan (muni d'une distance) non alignés. Considérons les propositions suivantes :

r: « le triangle ABC est rectangle en A »
i: « le triangle ABC est isocèle en A »
e: « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »

(1) On a l'implication $r \Longrightarrow e$ (que l'on appelle théorème de Pythagore dans le secondaire) ainsi que l'implication $e \Longrightarrow r$ (que l'on appelle réciproque du théorème de Pythagore dans le secondaire), donc on a l'équivalence $r \Leftrightarrow e$.
(2) La proposition r ou i se traduit par « le triangle ABC est au moins rectangle en A ou isocèle en A ». La proposition contraire de r ou i se traduit alors par « le triangle ABC n'est ni rectangle en A, ni isocèle en A ».
(3) De même, la proposition r et i se traduit par « le triangle ABC est à la fois rectangle en A et isocèle en A ». La proposition contraire de r et i se traduit alors par « le triangle ABC n'est par rectangle en A ou n'est pas isocèle en A ».

Propriété 2
Soient p et q deux propositions.
La proposition **contraire** de $\boldsymbol{p} \Longrightarrow \boldsymbol{q}$ est la proposition « $\boldsymbol{p}$ **et non** $\boldsymbol{q}$ ».

Exemple 6
(1) La négation de l'implication de l'exemple 3 est « il pleut et pourtant le ciel n'est pas nuageux ».
(2) La négation de l'implication du point (2) de la remarque 2 est « Aya Nakamura est présidente de la république et pourtant elle n'est pas cheffe des armées ».

1.3. Quantificateurs

Définition 5
Soit E un ensemble et $p(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend de la variable x, avec x un élément de E.
(1) La proposition « $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, p(x)$ », qui se lit « **pour tout** $\boldsymbol{x}$ **appartenant à** $\boldsymbol{E}$, p de x » ou « quel que soit x appartenant à E, p de x », est vraie lorsque **tous les éléments** de E ont la propriété p et est fausse sinon, c'est-à-dire lorsqu'il existe au moins un élément de E qui ne possède pas la propriété p.
(2) La proposition « $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, p(x)$ », qui se lit « **il existe** $\boldsymbol{x}$ **appartenant à** $\boldsymbol{E}$ tel que p de x », est vraie lorsqu'**au moins un élément** de E a la propriété p et est fausse sinon, c'est-à-dire lorsqu'aucun élément de E ne possède la propriété p.
(3) La proposition « $\exists!\, x \in E, p(x)$ », qui se lit « **il existe un unique** $\boldsymbol{x}$ **appartenant à** $\boldsymbol{E}$ tel que p de x », est vraie lorsque l'ensemble E contient **exactement un élément** vérifiant la propriété p.

Exemple 7
La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est fausse, alors que la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ » est vraie. En outre, la proposition « $\exists!\, x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ » est fausse, puisqu'exactement deux nombres réels ont un carré égal à 2 : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Remarque 4
Soient E et F deux ensembles, $p(x, y)$ une propriété dont la valeur de vérité dépend des variables x et y, où x est un élément de E et y un élément de F.
(1) Les propositions « $\forall x \in E, \forall y \in F, p(x, y)$ » et « $\forall y \in E, \forall x \in F, p(x, y)$ » sont équivalentes.
(2) De même, les propositions « $\exists x \in E, \exists y \in F, p(x, y)$ » et « $\exists y \in E, \exists x \in F, p(x, y)$ » sont équivalentes.
(3) Par contre, les propositions « $\exists x \in E, \forall y \in F, p(x, y)$ » et « $\forall x \in E, \exists y \in F, p(x, y)$ » ne sont pas équivalentes !
Par exemple la proposition « $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n + 1$ » est évidemment fausse, alors que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq x < n + 1$ » est vraie (ce nombre entier n s'appelle d'ailleurs la partie entière du nombre réel x).

Propriété 3
Soit E un ensemble et $p(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend de la variable x, avec x un élément de E.
(1) La **négation** de la proposition « $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ » est la proposition « $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, **non** $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ ».
(2) La négation de la proposition « $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ » est la proposition « $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, **non** $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ ».

Exemple 8
(1) On a vu en classe de seconde qu'une fonction numérique est dite croissante sur un intervalle I, lorsque :
$$\forall a \in I, \forall b \in I, a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$$
Donner la négation de cette proposition.
(2) Donner les négations des assertions suivantes :
f: « Tous les élèves de la classe jouent au foot » ; g: « un élève de la classe joue de la guitare ».

Remarque 5
(1) Lorsque l'on rédige, tout objet dont on parle doit être introduit. Par exemple, un calcul de dérivée ne doit jamais ressembler à « $f'(x) = \cdots$ », mais doit être présenté proprement, avec la variable x parfaitement introduite :
$$\forall x \in \cdots, f'(x) = \cdots$$
(2) Les symboles de quantification et de connexion logique servent à exprimer rigoureusement et brièvement des propositions mathématiques. Il est totalement exclu d'en faire usage en tant qu'abréviations !
Par exemple, des rédactions telles que « démontrons qu' $\exists$ un élément de $\mathbb{R}$ tel que … » ou « ce qui prouve que $\forall x \in \mathbb{R}$, la proposition … » sont proscrites !

2. Différents types de raisonnements

Remarque 6
Outre le raisonnement par déduction que l'on utilise depuis les petites classes, ou le raisonnement par équivalences que l'on utilise par exemple pour résoudre des équations, on distingue plusieurs autres types de raisonnements mathématiques :

2.1. Démontrer une proposition par implication

Exemple 9
Démontrons l'implication suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x+4} < 1$$

2.2. Démontrer par un contre-exemple

Exemple 10
Par définition d'une fonction numérique (unicité de l'image pour un antécédent donné), on a la proposition suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = y \Longrightarrow x^2 = y^2$$
La réciproque est-elle vraie ?

Remarque 7
Nous avons déjà utilisé la démonstration par contre-exemple à maintes reprises, notamment pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, ou qu'elle n'est pas géométrique.

2.3. Démontrer par l'absurde

Exemple 11
On rappelle que la nombre π est irrationnel. Démontrons que le nombre $2\pi + 3$ est irrationnel.

Remarque 8
Pour démontrer par l'absurde qu'une proposition est vraie, il suffit de supposer a contrario qu'elle est fausse et d'en déduire une contradiction.

2.4. Démontrer une proposition par récurrence

Le **principe de récurrence** est un moyen de démontrer des propriétés qui doivent être vérifiées pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang.

Définition 6
Soit $(P_n)_{n \geq p}$ une suite de propriétés indexées sur un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$, où p est un entier naturel fixé.
(1) On dit que la suite de propriété $(P_n)_{n \geq p}$ est **initialisée** si la propriété P_p est vérifiée.
(2) On dit que la suite de propriété $(P_n)_{n \geq p}$est **héréditaire**, lorsqu'en supposant la propriété P_n vérifiée pour un entier $n \geq p$ quelconque et fixé, la propriété (au rang suivant) P_{n+1} est également vérifiée.

Théorème (principe de récurrence)
Soit $(P_n)_{n\geq p}$ une suite de propriétés indexées sur un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$, où p est un entier naturel fixé.
Si la suite de propriétés $(P_n)_{n\geq p}$ est à la fois initialisée à partir du rang p et héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Exemple 12
(1) Rappeler et démontrer par récurrence la formule explicite pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.
(2) Rappeler la formule donnant la somme des $n+1$ (où n est un entier naturel) premières puissances d'un nombre réel q différent de 1 et la démontrer par récurrence.

Remarque 9
(1) Dans un raisonnement par récurrence, l'initialisation, même si elle est dans la plupart des cas évidente, est cruciale. Par exemple, la propriété P_n : "2^n est un multiple de 3" est héréditaire, pourtant elle est complètement fausse. Cela n'est pas en contradiction avec le principe de récurrence, puisque cette propriété ne peut être initialisée : en effet $2^0 = 1$ n'est pas un multiple de 3, $2^1 = 2$ non plus, etc.
(2) La plupart du temps, les suites de propriétés à démontrer sont initialisées aux rangs 0 ou 1.
(3) À partir de ce principe de récurrence général, on peut rédiger ce que l'on appelle des récurrences d'ordre 2 , totales, montantes, descendantes, finies, etc.