Thème 4 - Analyse - cours n°2 : généralités sur les fonctions

1. Premières définitions et vocabulaire

1.1. Définitions

Définition 1

(1) Une fonction numérique f est un procédé qui à un nombre réel x associe au plus un nombre réel, noté $\boldsymbol{f(x)}$ lorsqu'il existe, appelé **image de $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{f}$**. On note :

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

(2) L'ensemble des réels x admettant une image par une fonction numérique f s'appelle l'**ensemble de définition** de f. On le note souvent $\boldsymbol{\mathcal{D}_f}$.

(3) On dit qu'une fonction est une **application** lorsque son ensemble de départ et son ensemble de définition sont égaux. (Autrement écrit, une fonction f est une application lorsque, pour tout élément x de l'ensemble de départ de f, $f(x)$ est bien défini).

Exemple 1

(1) L'ensemble de définition de la fonction inverse $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$, l'ensemble de définition de la fonction racine carrée $g: x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$.

(2) L'ensemble de définition de la fonction $\begin{aligned} u:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto u(x) = \frac{3x^3+4x-7}{2x^2+4x-6} \end{aligned}$ est $\mathbb{R}\backslash\{1; -3\}$,

puisque la fonction trinôme du second degré $x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$ admet les deux racines réelles distinctes 1 et -3.

L'ensemble de définition de la fonction $\begin{aligned} v:\ & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto v(x) = \frac{3x^3+4x-7}{2x^2+4x-6} \end{aligned}$ est alors $\mathbb{R}\backslash\{1\}$,

Puisque l'ensemble de départ de v est $\mathbb{R}^+$ et non plus $\mathbb{R}$.

(3) La fonction $\begin{aligned} t:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto t(x) = -2x^2 + x + 6 \end{aligned}$ est une application,

puisque son ensemble de définition est égal à son ensemble de départ $\mathbb{R}$.

Définition 2

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, x un réel de $\mathcal{D}_f$ et y un réel.
Si $f(x) = y$, le réel x est appelé **un antécédent** de y par f.

Exemple 2

(1) L'image de -2 par la fonction inverse est égale à $-\frac{1}{2}$ puisque $f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; l'image de 1 par la fonction racine carrée est égale à 1 puisque $g(1) = \sqrt{1} = 1$.

(2) Les réels $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont les antécédents de 2 par la fonction carré (c'est-à-dire la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$). En effet …

(3) Le réel -3 n'admet aucun antécédent par la fonction racine carrée. En effet …

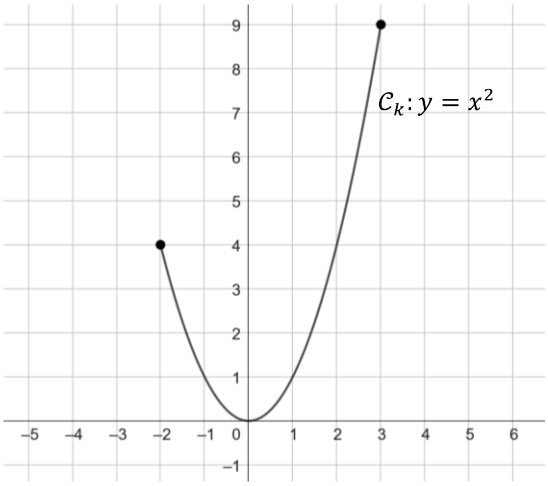
Remarque 1
(1) Par une fonction, un nombre réel peut admettre un, plusieurs ou aucun antécédent. Par contre, par définition, l'image d'un réel par une fonction est unique !
(2) Pour calculer l'image d'un réel a par une fonction f, il suffit de remplacer la variable x par a.
(3) Par contre, pour déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) d'un réel b par une fonction f, il faut résoudre l'équation $f(x) = b$.

1.2. Courbe représentative

Définition 3
On appelle **courbe représentative** d'une fonction numérique f, ce que l'on note souvent $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ (muni d'un repère) de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$, où $x \in \mathcal{D}_f$.
C'est-à-dire :

$$\mathcal{C}_f = \left\{M\big(x; f(x)\big) \in \mathcal{P}, x \in \mathcal{D}_f\right\}$$

Exemple 3
La courbe représentative dans un repère orthonormé de la fonction numérique k, définie sur l'intervalle $[-2; 3]$ par $k(x) = x^2$, est donnée sur le graphique ci-dessous :



Remarque 2
Soient x et y deux réels et $M(x; y)$ un point du plan. Avec les notations de la définition précédente, on a :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow (x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x))$$

L'égalité $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f, ce que l'on note :

$$\mathcal{C}_f : y = f(x)$$

2. Propriétés des fonctions

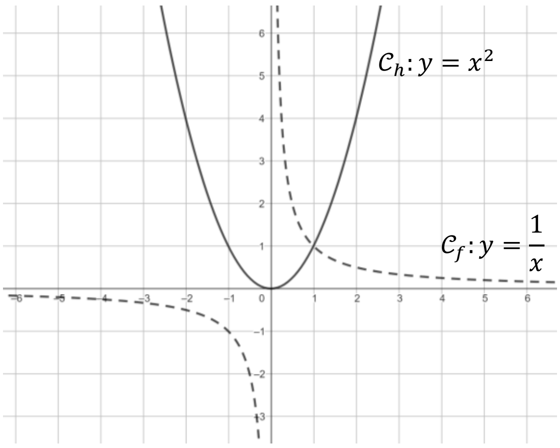
2.1. Fonctions paires, impaires

Définition 4
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$.
(1) La fonction f est dite **paire** lorsque, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
(2) La fonction f est dite **impaire** lorsque, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Proposition 1
Soient f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
(1) La fonction f est paire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O; \vec{\jmath})$.
(2) La fonction f est impaire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Remarque 3
Avec les notations de la définition précédente, avant d'examiner le nombre $f(-x)$, il est nécessaire de vérifier que l'ensemble de définition est bien centré en zéro (c'est-à-dire, pour tout réel x de de $\mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$).

Exemple 4
(1) La fonction carré h est paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction inverse f est impaire sur $\mathbb{R}^*$. En effet ...
Ceci est bien confirmé géométriquement :



(2) La fonction racine carrée n'est ni paire ni impaire, puisque son ensemble de définition n'est pas centré en zéro.

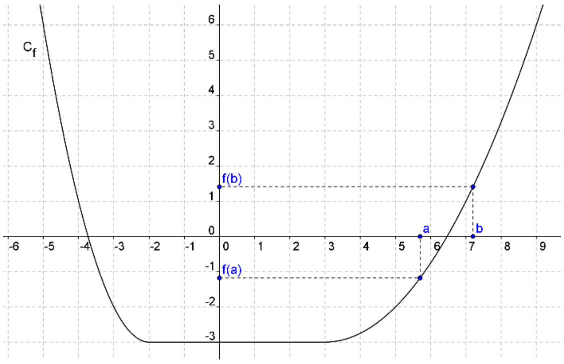
2.2. Fonctions monotones

Définition 5
Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.
(1) On dit que f est **croissante** sur l'intervalle I lorsque :
$$\forall (a; b) \in I^2, a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$$
(2) On dit que f est **strictement croissante** sur l'intervalle I lorsque :
$$\forall (a; b) \in I^2, a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

(3) On dit que f est **décroissante** sur l'intervalle I lorsque :
$$\forall(a;b) \in I^2, a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$$
(4) On dit que f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I lorsque :
$$\forall(a;b) \in I^2, a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$
(5) On dit que f est **constante** sur l'intervalle I lorsque :
$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = c$$
(6) On dit que f est **monotone** (respectivement **strictement monotone**) sur l'intervalle I lorsque f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I ou (ou exclusif) f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

Exemple 5

(1) On considère ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormé du plan, d'une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$:



On constate alors que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$; f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 3]$; f est strictement croissante sur l'intervalle $[3; +\infty[$; f est croissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$ et f est constante sur l'intervalle $[-2; 3]$.

On peut résumer toutes ces informations dans le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
variations de f	$\searrow$	-3 $\rightarrow$	-3	$\nearrow$

(2) La fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(3) La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, mais pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet ...

Remarque 4

(1) Lorsqu'une fonction est monotone sur un intervalle I, elle peut très bien être constante sur un intervalle J inclus dans I. En revanche, lorsqu'une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, elle ne peut plus y être constante !

(2) Lorsqu'une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, on peut a fortiori dire qu'elle est monotone sur I, ce qui est exacte d'un point de vue logique mais moins précis.

(3) Le sens de variation d'une fonction est intrinsèque à un intervalle : dire par exemple qu' « une fonction est croissante », sans dire sur quel intervalle, n'a aucun sens !

2.3. Fonctions minorées, majorées, bornées

Définition 6

Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de D_f.

(1) On dit que f est **majorée** sur $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}\,, f(x) \leq M$$

Dans ce cas, ce réel M est appelé **un majorant** de f sur $\mathcal{D}$.

(2) On dit que f est **minorée** sur $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m$$

Dans ce cas, ce réel m est appelé **un minorant** de f sur $\mathcal{D}$.

(3) On dit que f est **bornée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée sur cet intervalle.

Exemple 6

Démontrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ est bornée.

2.4. Signe d'une fonction

Définition 7 (signe d'une fonction)

Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de D_f.

(1) On dit que f est **positive ou nulle** sur $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq 0$$

(2) On dit que f est **strictement positive** sur $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) > 0$$

(3) On dit que f est **négative ou nulle** sur $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq 0$$

(4) On dit que f est **strictement négative** $\mathcal{D}$ lorsque :

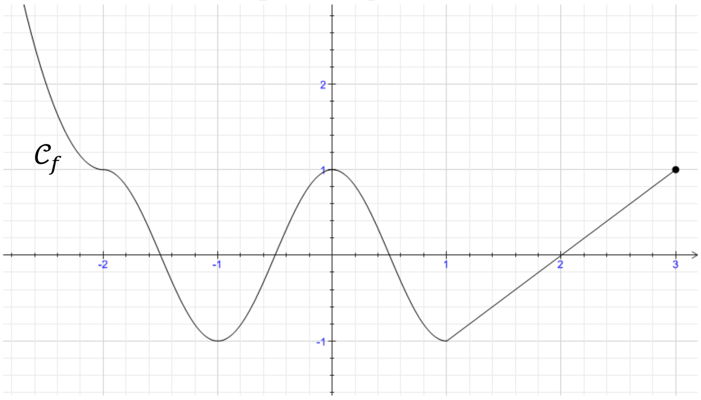
$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) < 0$$

(5) On dit que f est **nulle** sur $\mathcal{D}$, ou égale à la fonction nulle sur $\mathcal{D}$, lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = 0$$

Exemple 7

On considère ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormé du plan, d'une fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\infty; 3]$:



On remarque que f s'annule en $-1{,}5;\ -0{,}5; 0{,}5$ et 2.

Elle est positive ou nulle sur les intervalles $]-\infty; -1{,}5]$, $[-0{,}5; 0{,}5]$ et $[2; 3]$.

Elle est strictement positive sur les intervalles $]-\infty; -1{,}5[$, $]-0{,}5; 0{,}5[$ et $]2; 3]$.

Elle est négative ou nulle sur les intervalles $[-1{,}5; -0{,}5]$ et $[0{,}5; 2]$.

Elle est strictement négative sur les intervalles $]-1,5;-0,5[$ et $]0,5;2[$.
Pour résumer ces informations, on peut dresser le tableau de signes de la fonction f sur son ensemble de définition :

x	$-\infty$		$-1,5$		$-0,5$		$0,5$		2		3
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	1

Remarque 5
(1) D'un point de vue géométrique, une fonction f est positive ou nulle (respectivement strictement positive) sur $\mathcal{D}$, si et seulement si, sa courbe représentative est située au-dessus ou sur (respectivement strictement au-dessus de) de l'axe des abscisses sur cet ensemble.
De même, une fonction f est négative ou nulle (respectivement strictement négative) sur $\mathcal{D}$, si et seulement si sa courbe représentative est située en dessous ou sur (respectivement strictement en dessous de) de l'axe des abscisses sur cet ensemble.
(2) Le signe d'une fonction est intrinsèque à un ensemble $\mathcal{D}$: dire par exemple que « la fonction f est positive ou nulle », sans dire sur quel ensemble, n'a pas de sens !

2.5. Extrema globaux, locaux

Définition 8
Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$.
(1) On dit que f admet sur $\mathcal{D}$ le **maximum global** de $f(a)$ atteint en a, lorsqu'il existe un réel a de $\mathcal{D}$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq f(a)$$

(2) On dit que f admet sur $\mathcal{D}$ le **minimum global** de $f(b)$ atteint en b, lorsqu'il existe un réel b de $\mathcal{D}$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq f(b)$$

(3) On dit que f admet sur $\mathcal{D}$ le **maximum local** $f(a)$ atteint en a, lorsqu'il existe un réel a de $\mathcal{D}$ et un intervalle ouvert I centré en a, tels que :

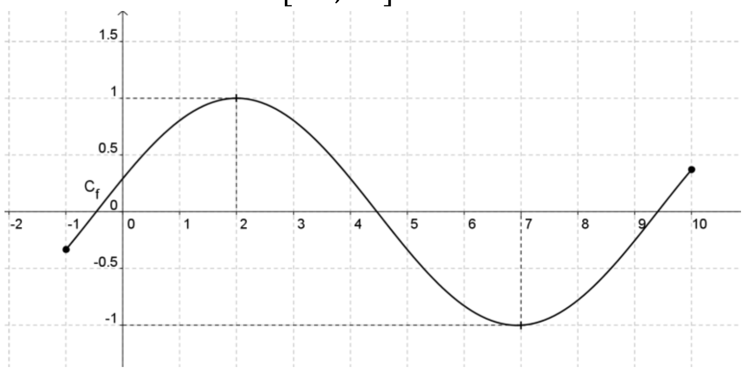
$$\forall x \in \mathcal{D} \cap I, f(x) \leq f(a)$$

(4) On dit que f admet sur $\mathcal{D}$ le **minimum local** $f(b)$ atteint en b, lorsqu'il existe un réel b de $\mathcal{D}$ et un intervalle ouvert I centré en b, tels que :

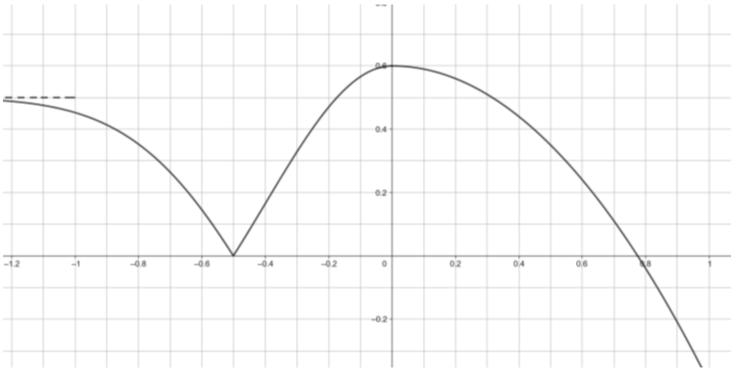
$$\forall x \in \mathcal{D} \cap I, f(x) \geq f(b)$$

(5) On dit que f admet sur $\mathcal{D}$ un **extremum** global (respectivement local) lorsqu'elle admet sur $\mathcal{D}$ un minimum global (respectivement local) ou un maximum global (respectivement local).

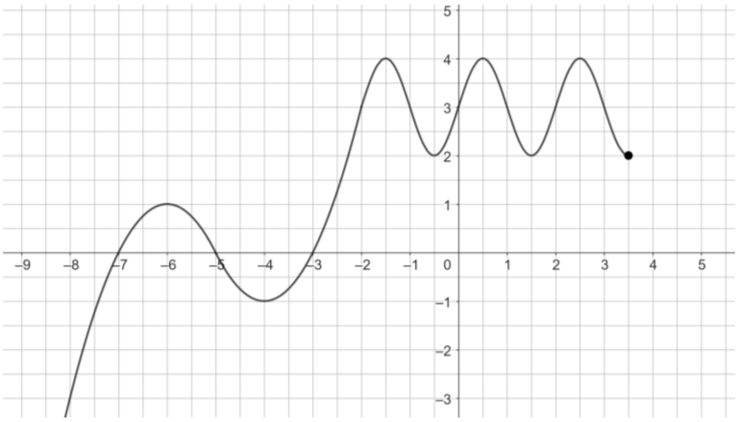
Exemple 8
(1) On considère ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormé du plan, d'une fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-1;10]$:



Elle admet sur cet intervalle le maximum de 1 atteint en 2 et le minimum de -1 atteint en 7.
(2) On considère ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormé du plan, d'une fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$:



Sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, la fonction g admet le maximum global de $0{,}6$ atteint en 0, le minimum local de 0 atteint en $-0{,}5$, mais pas de minimum global.
Sur l'intervalle $]-\infty; -0{,}5]$, la fonction g admet le minimum global de 0 atteint en $-0{,}5$, mais n'admet pas de maximum (à cause de l'asymptote horizontale d'équation $y = 0{,}5$). En revanche elle est majorée par $0{,}5$ sur cet intervalle.
(3) On considère ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormé du plan, d'une fonction numérique h définie sur $]-\infty; 3{,}5]$:



Sur son ensemble de définition, la fonction h n'admet pas de minimum, en revanche :
- elle admet le maximum global de 4 atteint en $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$;
- elle admet le maximum local de 1 atteint en -6 ;
- elle admet le minimum local de -1 atteint en -4 ;
- elle admet le minimum local de 2 atteint en $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{2}$.

<u>Remarque 6</u>
Avec les notations des définitions précédentes :
(1) Si on parle d'un extremum de f sur $\mathcal{D}$ sans préciser (local ou global ?), il s'agit par défaut d'un extremum global.
(2) La notion d'extremum pour f est intrinsèque à un ensemble $\mathcal{D}$: dire par exemple que « la fonction f admet le maximum de 2 », sans dire sur quel ensemble, n'a pas de sens !
(3) La fonction f peut être majorée (respectivement minorée) sur $\mathcal{D}$ sans y admettre de maximum (respectivement de minimum) !
(4) Lorsque f est majorée (respectivement minorée) sur $\mathcal{D}$, elle admet une infinité de majorants (respectivement de minorants). Par contre, le maximum (respectivement le minimum) de f sur $\mathcal{D}$, s'il existe, est unique !

(5) Le maximum (respectivement le minimum) de f sur $\mathcal{D}$ peut être atteint en plusieurs réels.
(6) Pour qu'un majorant M (respectivement un minorant m) de f sur $\mathcal{D}$ soit le maximum (respectivement le minimum) de f sur $\mathcal{D}$, il suffit qu'il soit atteint, c'est-à-dire qu'il existe un réel a de $\mathcal{D}$ tel que $M = f(a)$ (respectivement tel que $m = f(a)$).
(7) Tout extremum global de f sur $\mathcal{D}$ est a fortiori local. La réciproque est bien entendu fausse.

3. Opérations sur les fonctions

3.1. Opérations usuelles

Définition 9
Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble $\mathcal{D}$.
(1) On appelle **somme des fonctions f et g**, ce que l'on note $\boldsymbol{f+g}$, la fonction définie $\mathcal{D}$ par :
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
(2) On appelle **produit des fonctions f et g**, ce que l'on note $\boldsymbol{f \times g}$, la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par :
$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$
(3) Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on appelle **inverse de g**, ce que l'on note $\boldsymbol{\frac{1}{g}}$, la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par :
$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$$
(4) Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on appelle **quotient de f par g**, ce que l'on note $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$, la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par :
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
(5) Avec $k \in \mathbb{R}$, on appelle **produit de f par le réel k**, ce que l'on note $\boldsymbol{k.f}$, la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par :
$$(k.f)(x) = k \times f(x)$$

Exemple 9
(1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$ est le produit de la fonction carré par la fonction racine carrée.
(2) La fonction g définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$ est le quotient de la fonction racine carrée par la fonction cube.
(3) La fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $2 - \frac{3}{x}$ est la somme de la fonction constante égale à 2 et du produit de la fonction inverse par le réel -3. En effet :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = 2 + (-3) \times \frac{1}{x}$$

3.2. Composition de fonctions

Définition 10
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur des intervalles I et J respectivement, avec :

$$\forall x \in I, f(x) \in J$$

La **composée** de la fonction f par la fonction g, notée $\boldsymbol{g \circ f}$, est la fonction définie sur I par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Illustration :

Exemple 10
(1) Soient les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5$ et $g(x) = 2x - 3$.
La fonction $g \circ f$ est alors définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 + 5) = 2(x^2 + 5) - 3 = 2x^2 + 7$$

La fonction $f \circ g$ est par contre définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 9 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$$

(2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 5$, ainsi que la fonction racine carrée g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.
La fonction $g \circ f$ est alors définie sur $]-\infty; 5]$ (car $-x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq x$) par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(-x + 5) = \sqrt{-x + 5}$$

La fonction $f \circ g$ est par contre définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = -\sqrt{x} + 5$$

Remarque 7
(1) De manière générale, comme on a pu le constater dans l'exemple précédent, $f \circ g \neq g \circ f$.
(2) On note également, par exemple, $\sqrt{g}$, g^2, g^3 et $|g|$, les composées de la fonction g par, respectivement, la fonction racine carrée, la fonction carré, la fonction cube et la fonction valeur absolue.