Thème 5 - Analyse - cours n°3 : fonctions de référence

1. Fonctions usuelles

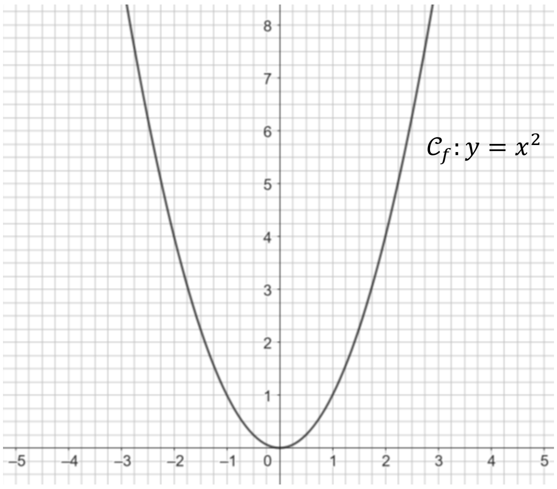
1.1. Fonctions puissances entières positives

1.1.1. Fonction carré

Définition 1

La fonction **carré** est la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Dans un repère orthogonal du plan d'origine O, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une **parabole** de sommet O et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

Courbe représentative :



Proposition 1

(1) La fonction carré f est paire sur $\mathbb{R}$.
(2) La fonction carré f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Voici son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(3) La fonction carré f admet sur $\mathbb{R}$ le minimum de 0 atteint en 0 et n'est pas majorée.
(4) La fonction carré f s'annule en 0 et est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Voici son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

(5) Soit a un réel positif ou nul. On a :

$$x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$
$$x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$
$$x^2 \geq a \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{a} \text{ ou } x \geq \sqrt{a}$$
$$x^2 > a \Leftrightarrow x < -\sqrt{a} \text{ ou } x > \sqrt{a}$$

Remarque 1

(1) Le (1) de la proposition précédente est immédiat puisque $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

(2) Le (2) de la proposition précédente a pour conséquence, avec a et b deux réels quelconques :

$$a < b \leq 0 \Rightarrow a^2 > b^2 \geq 0$$
$$0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq a^2 < b^2$$

(3) Le (4) de la proposition précédente a pour conséquence, avec x un réel quelconque :

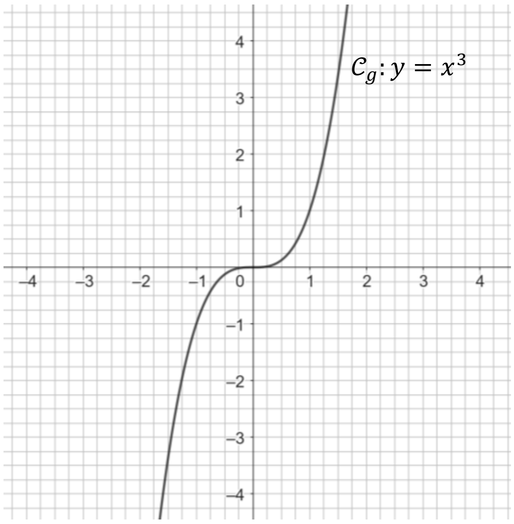
$$x^2 \geq 0$$
$$x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$
$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

1.1.2. Fonction cube

Définition 2

La fonction **cube** est la fonction g définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.

Courbe représentative :



Proposition 2

(1) La fonction cube g est impaire sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction cube g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voici son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de g			0		↗

(3) La fonction cube g n'admet sur $\mathbb{R}$ aucun extremum (local ou global) et n'est ni minorée, ni majorée.

(4) La fonction cube g s'annule en 0, est strictement négative sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et strictement positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Voici son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Remarque 2

(1) Le (1) de la proposition précédente est immédiat puisque $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = g(x)$$

On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à l'origine $\mathcal{O}$ du repère.

(2) Le (2) de la proposition précédente a pour conséquence, avec a et b deux réels quelconques :

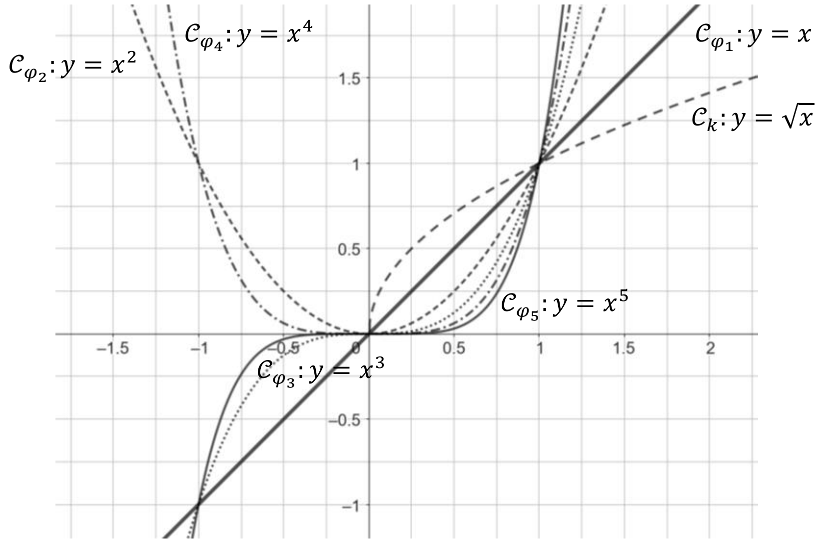
$$a < b \Rightarrow a^3 < b^3$$

(3) Le (4) de la proposition précédente a pour conséquence, avec x un réel quelconque :

$$x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$
$$x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$
$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

1.1.3. Généralisation

Courbes représentatives :



Proposition 3

(1) Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction φ_n définie sur $\mathcal{D}_{\varphi_n} = \mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = x^n$. On a alors les résultats suivants :

	n pair	**n impair**
parité de φ_n	φ_n est paire sur $\mathbb{R}$	φ_n est impaire sur $\mathbb{R}$
sens de variation de φ_n	φ_n est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$	φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
signe de φ_n	φ_n s'annule en 0 et est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$	φ_n s'annule en 0 est strictement négative sur $]-\infty; 0[$ et strictement positive $]0; +\infty[$

(2) On a également les inégalités suivantes :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < x^4 < x^5 < \dots$$
$$\forall x \in [0; 1[, \dots < x^5 < x^4 < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$$

Remarque 3

(1) Le premier résultat du tableau du (1) de la proposition précédente est immédiat puisque $\mathcal{D}_{\varphi_n} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(-x) = (-x)^n = \begin{cases} x^n = \varphi_n(x) \text{ si } n \text{ est pair} \\ -x^n = -\varphi_n(x) \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(2) Le deuxième résultat du tableau du (1) de la proposition précédente a pour conséquence, avec a et b deux réels quelconques :

- si n est pair :

$$a < b \leq 0 \Rightarrow a^n > b^n \geq 0$$
$$0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq a^n < b^n$$

- si n est impair :

$$a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

(3) Le troisième résultat du tableau du (1) de la proposition précédente a pour conséquence, avec x un réel quelconque :

- si n est pair :

$$x^n \geq 0$$
$$x^n > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$
$$x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- si n est impair :

$$x^n < 0 \Leftrightarrow x < 0$$
$$x^n > 0 \Leftrightarrow x > 0$$
$$x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

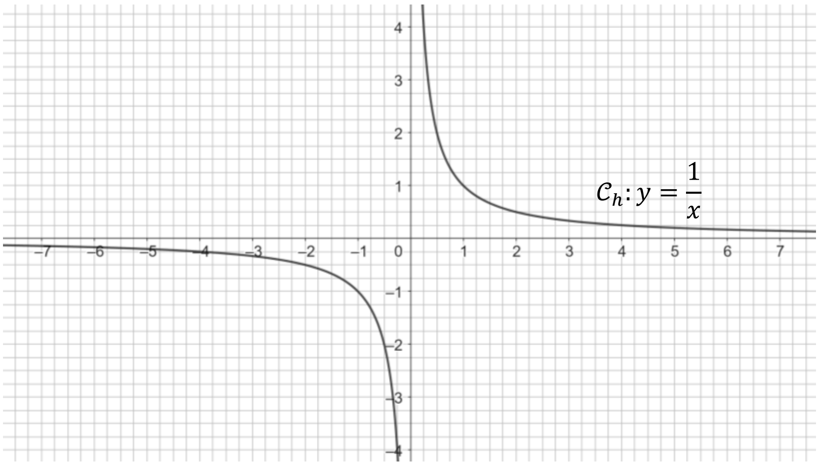
1.2. Fonction inverse

Définition 3

La fonction **inverse** est la fonction h définie sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

Dans un repère orthogonal du plan d'origine O, sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ est une **hyperbole** de centre de symétrie O, d'**asymptote verticale** l'axe des ordonnées et d'**asymptote horizontale** l'axe des abscisses.

Courbe représentative :



Proposition 4

(1) La fonction inverse h est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

(2) La fonction inverse h est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Voici son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de h		↘	‖	↘	

(3) La fonction inverse h n'admet sur $\mathbb{R}^*$ aucun extremum (local ou global) et n'est ni minorée, ni majorée. Par contre, elle est majorée par 0 sur $]-\infty;0[$ et minorée par 0 sur $]0;+\infty[$.

(4) La fonction inverse h est strictement négative sur $]-\infty;0[$ et strictement positive sur $]0;+\infty[$. Voici son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $h(x)$		$-$	‖	$+$	

Remarque 4

(1) Le (1) de la proposition précédente est immédiat puisque $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -h(x)$$

(2) Le (2) de la proposition précédente a pour conséquence, avec a et b deux réels non nuls quelconques :

$$a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

(3) Le (4) de la proposition précédente a pour conséquence, avec x un réel non nul quelconque :

$$x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$$

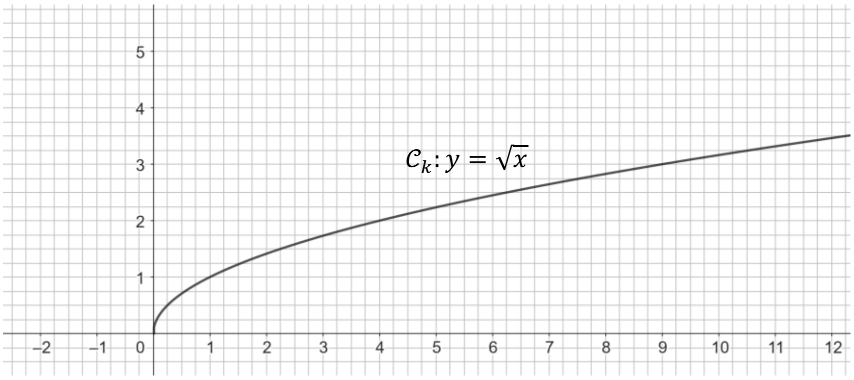
$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$$

1.3. Fonction racine carrée

Définition 4

La fonction **racine carrée** est la fonction k définie sur $\mathcal{D}_k = [0;+\infty[$ par $k(x) = \sqrt{x}$.

Courbe représentative :



Proposition 5

(1) La fonction racine carrée k n'est ni paire ni impaire.

(2) La fonction racine carrée k est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Voici son tableau de variations :

x	0	$+\infty$
variations de k	0 ↗	

(3) La fonction racine carrée k admet sur $[0;+\infty[$ le minimum de 0 atteint en 0 et n'est pas majorée.

(4) La fonction racine carrée k s'annule en 0 et est strictement positive sur $]0;+\infty[$. Voici son tableau de signes :

x	0		$+\infty$
signe de $k(x)$	0	$+$	

(5) Soit a un réel positif ou nul. On a :

$$\sqrt{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^2$$
$$\sqrt{x} < a \Leftrightarrow 0 \leq x < a^2$$
$$\sqrt{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^2$$
$$\sqrt{x} > a \Leftrightarrow x > a^2$$

Remarque 5

(1) Le (1) de la proposition précédente est immédiat puisque $\mathcal{D}_k = [0;+\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.

(2) Le (2) de la proposition précédente a pour conséquence, avec a et b deux réels positifs ou nuls quelconques :

$$0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

(3) Le (4) de la proposition précédente a pour conséquence, avec x un réel positif ou nul quelconque :

$$\sqrt{x} \geq 0$$
$$\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(4) Les propriétés algébriques de la fonction raciné carrée ont été énoncées et exploitées dans le thème 1.

1.4. Fonction valeur absolue

Définition 5

(1) La fonction **valeur absolue** est la fonction abs (elle souvent notée comme cela) définie sur $\mathcal{D}_{abs} = \mathbb{R}$ par :

$$abs(x) = \begin{cases} x\ si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases}$$

On note $abs(x) = |x|$.

(2) On appelle distance entre deux nombres réels a et b, ce que l'on note $d(a;b)$, le nombre réel $|a-b|$.

Exemple 1

(1) On a $|3{,}2| = 3{,}2$ (puisque $3{,}2 \geq 0$) ; $|-1| = 1$ (puisque $-1 < 0$) et $|0| = 0$ (puisque $(0 \geq 0)$.

(2) La distance entre les nombres 2 et $-1{,}4$ est égale à :

$$d(2;-1{,}4) = |2-(-1{,}4)| = |2+1{,}4| = |3{,}4| = 3{,}4$$

La distance entre les nombre 2 et 3 est égale à :

$$d(2;3) = |2-3| = |-1| = 1$$

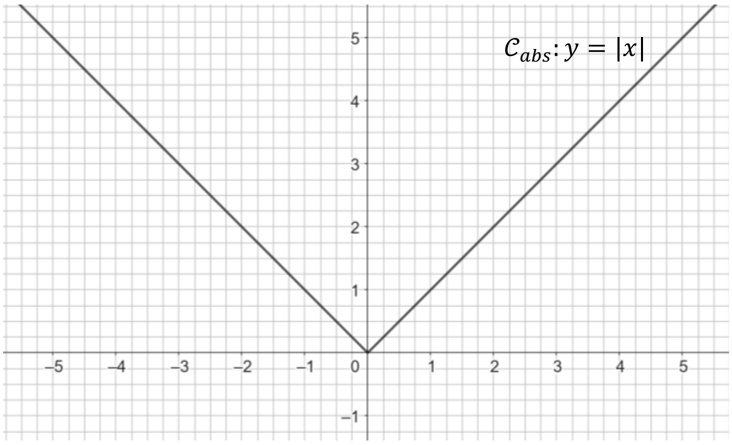
Remarque 6

(1) Puisque $|0| = 0$, on peut également définir la fonction valeur absolue de la manière suivante :

$$abs(x) = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x \leq 0 \end{cases}$$

(2) Avec les notations de la définition précédente, on a $|x| = |x-0| = d(x;0)$.

Courbe représentative :



Proposition 6

(1) La fonction valeur absolue abs est paire sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction valeur absolue abs est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Voici son tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de abs	↘	0	↗

(3) La fonction valeur absolue abs admet sur $\mathbb{R}$ le minimum de 0 atteint en 0 et n'est pas majorée.

(4) La fonction valeur absolue abs s'annule en 0 et est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Voici son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\lvert x\rvert$		$+$	0	$+$	

(5) Soit a un réel positif ou nul. On a :

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$
$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a$$

Remarque 7

(1) Le (1) de la proposition précédente est immédiat puisque $\mathcal{D}_{abs} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et que, pour tout réel x :

- si $x \geq 0, abs(x) = |x| = x = -(-x) = |-x| = abs(-x)$ (puisque $-x \leq 0$) ;
- si $x < 0, abs(x) = -x = |-x| = abs(-x)$ (puisque $-x > 0$).

En particulier, avec a et b deux réels quelconques, on a $d(a;b) = d(b;a)$. En effet :

$$d(a;b) = |a-b| = |-(a-b)| = |-a+b| = |b-a| = d(b;a)$$

(2) Le (2) de la proposition précédente a pour conséquence, avec a et b deux réels quelconques :

$$a < b \leq 0 \Rightarrow |a| > |b| \geq 0$$
$$0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq |a| < |b|$$

(3) Le (4) de la proposition précédente a pour conséquence, avec x un réel quelconque :

$$|x| \geq 0$$
$$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Proposition 7

Pour tous réels x et y :

(1) $x \leq |x|$;

(2) $|x|^2 = x^2$;

(3) $|xy| = |x| \times |y|$;

(4) Avec $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

(5) Pour tout entier naturel n, $|x^n| = |x|^n$; avec $x \neq 0$, pour tout entier négatif ou nul n, $|x^n| = |x|^n$;

(6) $|x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si, et seulement si, x et y ont le même signe (cette inégalité est connue sous le nom d'**inégalité triangulaire**).

Exemple 2

(1) Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$(E_1): |x - 3| = 1{,}6 \text{ ; } (E_2): |x + 1| = -2 \text{ ; } (E_3): |x + 1| + |x - 1| = 4 \text{ ;} (I_1): |5 - x| < 2{,}3 \text{ ;}$$
$$(I_2): |2x - 1| \geq 6; (I_3): |x^2 - 1| \leq 8$$

(2) On pose, pour tout réel x, $f(x) = |x| - |x - 4|$. Représenter la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

1.5. Fonctions affines

Définition 6

(1) Une fonction ϕ est dite **affine** sur un intervalle I, lorsque son expression analytique sur I est de la forme $\boldsymbol{\phi(x) = mx + p}$, où m et p sont deux nombres réels fixés.

(2) Une fonction est dite **linéaire** sur I lorsqu'elle est affine sur I avec $\boldsymbol{p = 0}$. On a alors :

$$\boldsymbol{\forall x \in I, \phi(x) = mx}$$

(3) Une fonction est dite **constante égale à $\boldsymbol{p}$** sur I lorsqu'elle est affine sur I avec $\boldsymbol{m = 0}$. On a alors :

$$\boldsymbol{\forall x \in I, \phi(x) = p}$$

Exemple 3

La fonction $x \longmapsto \sqrt{3}x - \frac{2}{3}$ est affine sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto -5x$ est linéaire sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \longmapsto 6$ est constante égale à 6 sur $\mathbb{R}$.

Remarque 8

(1) Sauf dans le cas d'une éventuelle restriction apportée par l'énoncé ou d'une fonction affine par morceaux (cf. exemple 2 (2) précédent), les fonctions affines sont généralement définies sur $I = \mathbb{R}$.

(2) Les fonctions linéaires et constantes sont des fonctions affines particulières.

Proposition 8

On se place dans le plan muni d'un repère orthogonal d'origine O.

(1) La représentation graphique d'une fonction affine sur $\mathbb{R}$ est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Cette droite passe par l'origine dans le cas où cette fonction est linéaire.

Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses dans le cas où cette fonction est constante.

(2) Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine (plus précisément d'une fonction linéaire dans le cas où cette droite passe par O, d'une fonction constante dans le cas où cette droite est parallèle à l'axe des abscisses).

Définition 7

Soient ϕ une fonction affine sur $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = mx + p$, et (d) sa droite représentative dans un repère orthogonal du plan.

On a alors $(d): y = mx + p$.

L'équation $y = mx + p$ est appelée **équation cartésienne réduite** de la droite (d).

Le réel m est appelé **coefficient directeur** de la droite (d), le réel p est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite (d).

Remarque 9

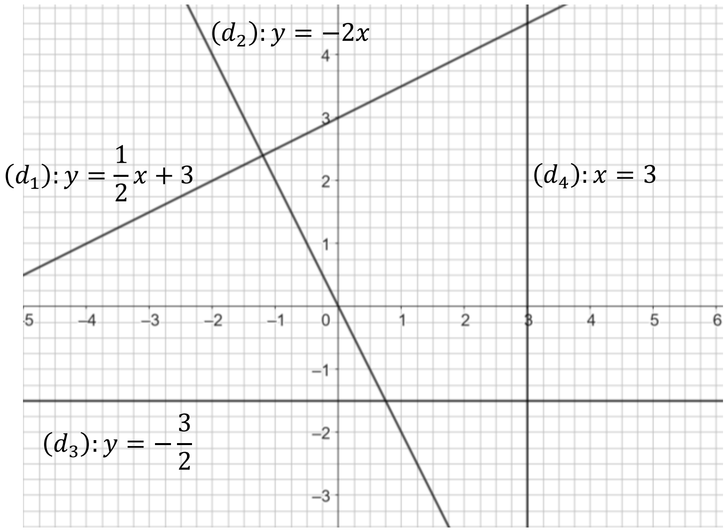
Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation graphique d'une fonction. Elle admet pourtant une équation cartésienne réduite du type $x = a$, où a est l'abscisse commune à tous les points de cette droite.

Exemple 4

Sur le graphique ci-dessous, les droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentent respectivement :

- la fonction affine $f_1: x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$;
- la fonction linéaire $f_2: x \mapsto -2x$;
- la fonction constante (égale à $-\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$) $f_3: x \mapsto -\frac{3}{2}$.

La droite (d_4) ne représente aucune fonction.



Remarque 10

On a rappelé dans les cours précédents comment déterminer le sens de variation et le signe d'une fonction affine !

2. Fonctions polynomiales

Définition 8

On appelle **fonction polynomiale** (ou **polynôme**) toute fonction numérique P telle que :

$$P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Où n est un entier naturel et, pour tout entier naturel k de l'ensemble $[\![0;n]\!]$, a_k est un réel fixé (indépendant de x).
Les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients de P.
Le plus grand entier k_0 de l'ensemble $[\![0;n]\!]$, tel que $a_{k_0}\neq 0$, est appelé le **degré de P**, noté $\deg(P)$.
Ce réel a_{k_0} est alors appelé le **coefficient dominant** de P.
Pour tout entier naturel k de l'ensemble $[\![0;n]\!]$, la quantité $a_k x^k$ est appelée **monôme de degré k** de P.

Remarque 11

(1) Une fonction polynomiale est, sauf restriction apportée par l'énoncé, définie sur $\mathbb{R}$. Dans la suite du cours, les fonctions polynomiales considérées sont donc définies sur $\mathbb{R}$.
(2) Avec les notations de la définition précédente, on note souvent un polynôme de manière formelle comme ceci :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

(3) La fonction polynomiale dont tous les coefficients sont nuls est appelée fonction polynomiale nulle ou polynôme nul.
(4) Les fonctions polynomiales de degré 0 sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, les fonctions polynomiales de degré 1 sont les fonctions affines, les fonctions polynomiales de degré 2 sont les fonctions trinômes du second degré.
(5) Par convention, le degré de la fonction polynomiale nulle est $-\infty$.
(6) En réalité, un polynôme et une fonction polynomiale ne représentent pas le même objet, mais on identifie souvent les deux, comme par exemple en filière ECT.

Exemple 5

Les fonctions f, g, h, k et t, définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, g(x) = x^2 + 3x - 2,$
$h(x) = -x^2, k(x) = 7x + 1$ et $t(x) = 6$, sont des fonctions polynomiales. Donner leur degré et leur coefficient dominant.

Proposition 9

(1) Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même degré et les mêmes coefficients.
(2) Un polynôme est le polynôme nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

Proposition 10

Soient P et Q deux fonctions polynomiales non nulles. On a :

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Exemple 6

En reprenant l'exemple précédent, déterminer le polynôme hk. L'égalité donnée par la proposition précédente est-elle bien vérifiée ?

Théorème (et définition) 1 (de **division euclidienne**)

Soient A et B deux fonctions polynomiales, avec B non nulle (c'est-à-dire non égale à la fonction polynomiale nulle).

Il **existe** un **unique** couple (Q, R) de fonctions polynomiales telles que :

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Les fonctions polynomiales Q et R sont respectivement appelées **quotient** et **reste** dans la division euclidienne de A par B.

Exemple 7

En reprenant l'exemple précédent :

(1) Donner le quotient et le reste dans la division euclidienne de f par g.

(2) Donner le quotient et le reste dans la division euclidienne de g par k.

(3) Donner le quotient et le reste dans la division euclidienne de k par f.

Remarque 12

Avec les notations du théorème précédent :

(1) Attention, pour que les fonctions polynomiales Q et R soient respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B, il ne suffit pas d'écrire $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, il faut également impérativement $\deg(R) < \deg(B)$.

(2) Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, dans le cas où $\deg(A) < \deg(B)$, alors, dans la division euclidienne de A par B, le quotient est la fonction polynomiale nulle et le reste est A !

(3) Lorsque R est la fonction polynomiale nulle, on dit que **B divise A** ou que **A est divisible par B**.

Théorème 2

Soient A et B deux fonctions polynomiales, avec B non nulle. Dans la division euclidienne de A par B, en notant Q le quotient, on a :

$$\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Définition 9

Soient P une fonction polynomiale et α un réel.

On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème 3

Soient P une fonction polynomiale et α un réel. On a alors :

α est une racine de P si, et seulement si, il existe une fonction polynomiale Q telle que :

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

Autrement dit, α est une racine de P si, et seulement si, P est divisible par $X - \alpha$.

Exemple 8

On considère le polynôme $P(X) = 5X^3 - 20X^2 + 15X + 90$.

(1) Justifier que -2 est une racine de P.

(2) En déduire les réels a, b et c tels que $P(X) = (X + 2)(aX^2 + bX + c)$. (2 méthodes !)

(3) Factoriser le polynôme P au maximum. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

3. Fonctions rationnelles

Définition 10

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction k égale au quotient $\frac{f}{g}$, où f et g sont des fonctions polynomiales.

Remarque 13

Avec les notations de la définition précédente, une fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}\backslash E$, où E est l'ensemble (éventuelle vide) des racines de g.

Exemple 9

On considère la fonction rationnelle $f: x \mapsto f(x) = \frac{-10x^2+11x+11}{2x+1}$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

(2) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$ (deux méthodes).

(3) En déduire le sens de variation de f sur les intervalles $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.