Thème 6 – Algèbre et logique - cours n°3 : ensembles

1. Ensembles

1.1. Ensembles, sous-ensembles, éléments

Remarque 1
Nous ne définissons pas ici les notions d'ensemble et d'appartenance. Il suffit de savoir qu'un ensemble est parfaitement défini dès lors que l'on sait préciser sans ambiguïté quels sont ses éléments.

Définition 1
Un ensemble E est constitué d'**éléments**.
On note $\boldsymbol{x \in E}$ pour signifier que l'élément x **appartient** à l'ensemble E ;
On note $\boldsymbol{x \notin E}$ pour signifier que l'élément x **n'appartient pas** à l'ensemble E.

Exemple 1
(1) L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

(2) L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}\ et\ n \in \mathbb{N}\}$$

(3) L'ensemble E des nombres entiers compris entre 2 et 8, que l'on peut noter de plusieurs façons :

$$E = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$
$$E = [\![2; 8]\!]$$
$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n < 9\}$$

(4) L'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, noté $\mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

(5) L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$ ou $\{\}$. C'est l'unique ensemble ne contenant aucun élément.

Remarque 2
(1) On a l'habitude de noter le nom d'un ensemble avec une lettre majuscule, tandis que ses éléments sont plutôt notés avec des lettres minuscules.
(2) Pour décrire un ensemble E, comme dans le (1) de l'exemple précédent, on peut donner directement ses éléments. C'est ce qu'on appelle définir l'ensemble E « **en extension** ».
(3) Une autre façon de décrire un ensemble E est de donner, comme dans le (2) de l'exemple précédent, une propriété caractéristique de ses éléments. C'est ce qu'on appelle définir l'ensemble E « **en compréhension** ».

Définition 2
On dit que deux ensembles E et F sont **égaux**, ce que l'on note $\boldsymbol{E = F}$, lorsque ces deux ensembles ont exactement les **mêmes éléments**.

Définition 3

Soient A et E deux ensembles.

On dit que A est **inclus** dans E, ou que A est un **sous-ensemble** de E, ou encore que A est une **partie** de E, ce que l'on note $A \subset E$, lorsque tout élément de A est un élément de E.

C'est-à-dire :

$$\boldsymbol{A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in E}$$

Exemple 2

(1) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Les intervalles $[a; b]$ et $[a; +\infty[$ sont des parties de $\mathbb{R}$. On a également $[a; b] \subset [a; +\infty[$.

(2) Soient p et q deux entiers relatifs tels que $p < q$. L'ensemble $[\![p; q]\!]$ est une partie de $\mathbb{Z}$. On a également $\{p\} \subset \mathbb{Z}$.

Remarque 3

(1) Un ensemble constitué d'un seul élément est appelé singleton.

(2) Soit E un ensemble. Nous admettons que les sous-ensembles de E constituent un ensemble.

Définition 4

Soit E un ensemble. L'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E, noté $\boldsymbol{\mathcal{P}(E)}$, est appelé l'**ensemble des parties de $\boldsymbol{E}$**.

Exemple 3

Avec $E = \{a; b; c\}$, on a $\mathcal{P}(E) = \{\{\ \} ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a ; b\} ; \{a ; c\} ; \{b ; c\} ; \{a ; b ; c\}\}$.

Remarque 4

(1) Avec A et E deux ensembles, la notation $A \subset E$ a la même signification que la notation $A \in \mathcal{P}(E)$.

Il est important de bien distinguer les deux symboles « ∈ » et « ⊂ » : le premier concerne un élément appartenant à un ensemble, le second concerne un ensemble inclus dans un autre ensemble.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on a $a \in \{a; b; c\}$ mais $\{a\} \subset \{a; b; c\}$.

(2) Avec E un ensemble, on a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient toujours au moins un élément qui est $\emptyset$. Il est possible que ce soit le seul : dans le cas où E est lui-même l'ensemble vide, on a en effet $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$.

Théorème 1

Soient E et F deux ensembles. On a l'équivalence suivante :

$$\boldsymbol{E = F \Leftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E}$$

Remarque 5

On utilise très souvent le théorème précédent pour démontrer que deux ensembles sont égaux.

1.2. Opérations dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$

Définition 5

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

(1) La **réunion** des ensembles A et B, notée $\boldsymbol{A \cup B}$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à A **ou** B, c'est-à-dire à **au moins l'un des deux ensembles** :

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

(2) L'**intersection** des ensembles A et B, notée $\boldsymbol{A \cap B}$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à A **et** B, c'est-à-dire **aux deux ensembles à la fois**:

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}}$$

Lorsque $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.

(3) Le **complémentaire de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{E}$**, noté $\boldsymbol{\overline{A}}$ ou $\boldsymbol{\mathcal{C}_E(A)}$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$\boldsymbol{\overline{A} = \mathcal{C}_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}}$$

(4) La **différence** de A et B, notée $\boldsymbol{A \backslash B}$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B :

$$\boldsymbol{A \backslash B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}}$$

Illustration avec des diagrammes de Venn :

Exemple 4

(1) Avec $A = \{1; a; b; c; *; -; +; \heartsuit\}$ et $B = \{a; c; *; 1; 2; 3; +\}$ deux parties d'un ensemble E, donner $A \cap B$, $A \cup B$, $\mathcal{C}_A(\{a; b; c; \heartsuit\})$ et $A \backslash B$.

(2) Avec $I =]-\frac{2}{3}; 10]$ et $J = [-\frac{3}{2}; 5[$, donner $I \cap J, I \cup J, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(I)$ et $I \backslash J$.

(3) On rappelle, par exemple, que l'ensemble $E = [\![1; 10]\!]$ désigne l'ensemble $[1; 10] \cap \mathbb{N}$. On note également $F = [\![8; 15]\!]$. Donner $E \cap F, E \cup F, \mathcal{C}_{\mathbb{N}}(E), \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}(E)$ et $E \backslash F$.

Remarque 6

(1) Avec les notations de la définition précédente, on a directement :

$$A \backslash B = A \cap \bar{B}$$

(2) Il ne faut pas confondre, pour deux ensembles, les adjectifs « distincts » et « disjoints ». Ainsi, comme on l'a vu dans l'exemple précédent, les ensembles $[\![1; 10]\!]$ et $[\![8; 15]\!]$ sont distincts (ils ne sont pas égaux !), mais ils ne sont pas disjoints puisque $[\![1; 10]\!] \cap [\![8; 15]\!] = [\![8; 10]\!] \neq \emptyset$.

(3) Les points (1) et (2) de la définition précédente se généralisent à n éléments de $\mathcal{P}(E)$ notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ (où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2) :

- la réunion des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, notée $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, ou plus simplement $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à au moins l'un de ces n ensembles :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E \mid \exists k \in [\![1\,; n]\!], x \in A_k\}$$

- l'intersection des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, notée $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, ou plus simplement $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à ces n ensembles à la fois :

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E \mid \forall k \in [\![1\,; n]\!], x \in A_k\}$$

Proposition 1

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, A, B et C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

(1) La réunion et l'intersection sont **associatives** :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \text{ et } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

(2) La réunion et l'intersection sont **commutatives** :

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A$$

(3) On a :

$$A \cap E = A,\ A \cap A = A,\ A \cup \emptyset = A,\ A \cup A = A,\ A \subset A \cup B,\ B \subset A \cup B,\ A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B$$

(4) On a :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \text{ et } A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

(5) L'intersection est **distributive** par rapport à la réunion et la réunion est **distributive** par rapport à l'intersection :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(6) On a :

$$\bar{E} = \mathcal{C}_E(E) = \emptyset, \bar{\emptyset} = \mathcal{C}_E(\emptyset) = E, \bar{\bar{A}} = \overline{(\bar{A})} = \mathcal{C}_E(\bar{A}) = A, A \cup \mathcal{C}_E(A) = A \cup \bar{A} = E$$
$$\text{et } A \cap \mathcal{C}_E(A) = A \cap \bar{A} = \emptyset$$

(7) On appelle **lois de Morgan** les deux égalités suivantes :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(8) On a :

$$A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

Démonstration :

Démontrons par exemple les points (1), (4), (5), (7) et (8).

Remarque 7

Comme on vient de le voir, pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on peut par exemple, dans certains cas, raisonner par équivalence. On utilise également souvent le théorème 1 (en montrant l'égalité par double inclusion).

On peut aussi procéder comme dans l'exemple qui suit, par égalités successives, en utilisant les propriétés de l'intersection et de la réunion .

Exemple 5

Soient A et B deux parties d'un ensemble F. On pose $C = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$. Démontrer que $C = A \cap B$.

1.3. Produit cartésien d'ensembles

Définition 6

(1) Soient A et B deux ensembles non vides.

On appelle **produit cartésien** des ensembles A et B, noté $\boldsymbol{A \times B}$, l'ensembles des **couples** $(a; b)$, où $a \in A$ et $b \in B$:

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}}$$

(2) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et n ensembles non vides notés $A_1, A_2, \dots, A_n$.

On appelle **produit cartésien** des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, noté $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}$, l'ensembles des $\boldsymbol{n}$**-uplets** $(a_1; a_2; \dots; a_n)$, où, pour tout entier k de $[\![1 ; n]\!]$, $a_k \in A_k$:

$$\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) \mid \forall k \in [\![1 ; n]\!], a_k \in A_k\}}$$

Remarque 8
Avec les notations de la définition précédente :
(1) Un couple, ou plus généralement un n-uplet, est un ensemble **ordonné**. Ainsi, les couples $(a; b)$ et $(b; a)$ ne sont pas égaux, contrairement aux ensembles $\{a; b\}$ et $\{b; a\}$ qui eux le sont.
(2) Les deux n-uplets $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ et $(a_1'; a_2'; \dots; a_n')$ sont égaux si, et seulement si, pour tout entier k de $[\![1\,;n]\!]$, $a_k = a_k'$.
(3) Un n-uplet d'éléments de $A_1 \times\ A_2 \times \dots \times A_n$ est aussi appelé **n-liste** d'éléments de $A_1 \times\ A_2 \times \dots \times A_n$.
(4) Lorsque $A = B$, on note volontiers A^2 l'ensemble $A \times A$.
Plus généralement, lorsque $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, on note volontiers A^n l'ensemble $A_1 \times\ A_2 \times \dots \times A_n$.

Exemple 6
(1) Avec $A = [\![1\,;3]\!]$ et $B = [\![0\,;2]\!]$, on a $A \times B = \{(1;0); (1;2); (2;0); (2;2); (3;0); (3;2)\}$.
(2) Représentons, dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble $[-1;1] \times [-2;3]$.
(3) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de nombres réels. Plus généralement, avec n un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de nombres réels.

2. Ensembles finis

On s'intéresse dans ce paragraphe à certains ensembles **finis** et au nombre d'éléments qu'ils contiennent.

Définition 7
Un ensemble fini E est un ensemble contenant un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments appartenant à E s'appelle le **cardinal de E** et se note $\boldsymbol{card(E)}$. **Dénombrer** un ensemble fini E, c'est déterminer son cardinal.

Remarque 9
(1) L'ensemble vide, noté $\{\}$ ou $\emptyset$ est, par convention, un ensemble de cardinal égal à 0.
(2) On peut bien évidemment dénombrer un ensemble fini en explicitant ses éléments (puis en les comptant).
(3) On admet qu'un sous-ensemble d'un ensemble fini est fini. On admet également qu'une réunion, une intersection ou un produit cartésien d'ensembles finis est fini.

2.1. Cardinal d'une réunion d'ensembles finis

Proposition 2
(1) Soit A une partie d'un ensemble fini E. On a :
$$\boldsymbol{card(\mathcal{C}_E) = card(\overline{A}) = card(E) - card(A)}$$
(2) Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E.
(i) On a de manière générale :
$$\boldsymbol{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}$$
(ii) Et dans le cas où A et B sont deux ensembles **disjoints** :
$$\boldsymbol{card(A \cup B) = card(A) + card(B)}$$

(3) (Généralisation du point (2)(ii))
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et n parties **deux à deux disjointes** $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'un ensemble fini E. On a alors :

$$\boldsymbol{card(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = card(A_1) + card(A_2) + \cdots + card(A_n)}$$

Ce que l'on peut noter plus simplement :

$$\boldsymbol{card\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} card(A_k)}$$

Démonstration :
Un diagramme de Venn suffit pour les deux premiers points. Le troisième point s'établit par récurrence.

Exemple 7
Dans un centre de vacances deux activités sont proposées aux 130 enfants : la natation ou l'équitation.
80 enfants pratiquent la natation, 45 pratiquent l'équitation et 12 ne pratiquent ni l'une ni l'autre des deux activités. Combien d'enfants pratiquent les deux activités à la fois ?

2.2 Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis

Proposition 3
(1) Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble fini E. On a :

$$\boldsymbol{card(A \times B) = card(A) \times card(B)}$$

(2) Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p ensembles finis et non vides $A_1, A_2, \dots, A_p$.
On a :

$$\boldsymbol{card\left(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p\right) = card(A_1) \times card(A_2) \times \dots \times card(A_p)}$$

Démonstration : démontrons le premier point. Le deuxième s'établit par récurrence.

Exemple 8
(1) Jean se rend dans un magasin pour acheter un ordinateur portable, un sac pour le protéger et une souris. On lui propose le choix entre quatre ordinateurs, deux pochettes pour le protéger et trois souris pour naviguer sur son écran. Combien de choix possibles sont-ils offerts à Jean ?
(2) Pour entrer dans un immeuble, on tape successivement cinq caractères au niveau du digicode :
- une lettre qui est A ou B et qui intervient en première ou en dernière position ;
- quatre chiffres compris entre 0 et 9.

(a) Combien y a-t-il de codes différents possibles ?
(b) Combien y a-t-il de codes différents possibles faisant apparaître au moins une fois le chiffre 0 ?