Thème 8 - Analyse - cours n°4 : limites et continuité

1. Limites de fonctions

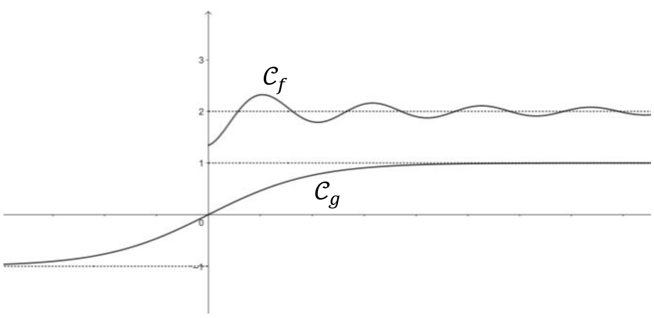
1.1. Limites aux voisinages des infinis

Définition 1
Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
(1) On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ lorsqu'il existe un réel a tel que l'intervalle $[a;+\infty[$ est inclus dans $\mathcal{D}_f$.
(2) On dit que f est définie au voisinage de $-\infty$ lorsqu'il existe un réel b tel que l'intervalle $]-\infty;b]$ est inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Exemple 1
La fonction carré est définie aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, par contre la fonction racine carrée n'est définie qu'au voisinage de $+\infty$ (et pas au voisinage de $-\infty$).

Définition 2 (limite finie aux voisinages des infinis)
(1) Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$.
On dit que f admet pour limite le réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « proches » que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment « grand ».
(2) Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$.
On dit que f admet pour limite le réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « proches » que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment « grand » en valeur absolue tout en étant négatif.

Exemple 2
Sur le graphique ci-dessous, sont représentées dans un repère orthogonal deux fonctions numériques f et g.
On a ici $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.



Remarque 1

(1) Donnons une définition plus rigoureuse de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$:

On dit que f admet pour limite le réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque pour tout réel strictement positif ε (même arbitrairement proche de 0), il existe un réel α, tel que :

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\text{ (c'est-à-dire } \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon)$$

Avec les quantificateurs, la traduction en symbolique mathématique de cette définition est :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$$

(2) Donnons une définition plus rigoureuse de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$:

On dit que f admet pour limite le réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$, lorsque pour tout réel strictement positif ε (même arbitrairement proche de 0), il existe un réel α, tel que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\text{ (c'est-à-dire } \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon)$$

Avec les quantificateurs, la traduction en symbolique mathématique de cette définition est :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty; \alpha[, f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$$

(3) Les propriétés algébriques de la fonction valeur absolue donnent :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} |f(x) - \ell| = 0$$

(Autrement dit, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ lorsque la distance entre $f(x)$ et ℓ tend vers 0.)

Proposition 1 (limites de fonctions usuelles)

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

(2) Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

(3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Démonstration : admise

Définition 3 (limite infinie aux voisinages des infinis)

(1) Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$.

- On dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut dès que x est suffisamment « grand » .
- On dit que f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut en valeur absolue tout en étant négatifs dès que x est suffisamment « grand ».

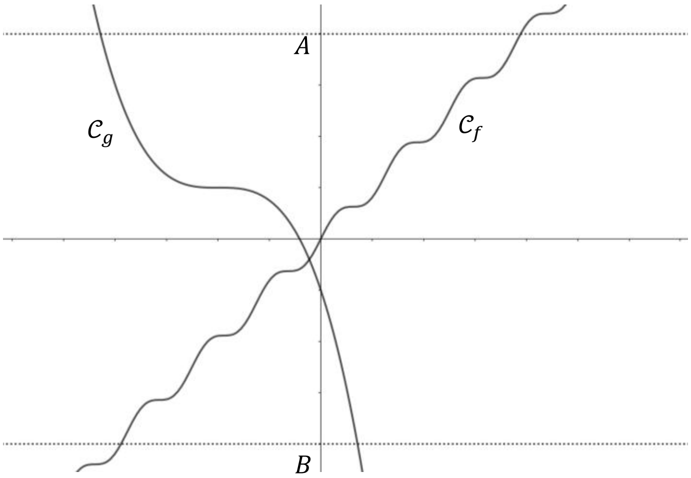
(2) Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$.

- On dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, ce que l'on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut dès que x est suffisamment « grand » en valeur absolue tout en étant négatif .
- On dit que f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, ce que l'on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut en valeur absolue tout en étant négatifs dès que x est suffisamment « grand » en valeur absolue tout en étant négatif .

Exemple 3

Sur le graphique ci-dessous, sont représentées dans un repère orthogonal deux fonctions numériques f et g telles que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ , } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$



Remarque 2

(1) Donnons une définition plus rigoureuse de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$:

- On dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque pour tout réel A (même arbitrairement « grand »), il existe un réel α, tel que :

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) \in]A; +\infty[\text{ (c'est-à-dire } A < f(x))$$

- On dit que f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque pour tout réel B (même négatif et arbitrairement « grand » en valeur absolue), il existe un réel α, tel que :

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) \in]-\infty; B[\text{ (c'est-à-dire } f(x) < B)$$

- Avec les quantificateurs, la traduction en symbolique mathématique de ces deux définitions est :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]\alpha; +\infty[, A < f(x)$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) < B$$

(2) Donnons une définition plus rigoureuse de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:

- On dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, lorsque pour tout réel A (même arbitrairement « grand »), il existe un réel α, tel que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, f(x) \in]A; +\infty[\text{ (c'est-à-dire } A < f(x))$$

- On dit que f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, lorsque pour tout réel B (même négatif et arbitrairement « grand » en valeur absolue), il existe un réel α, tel que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, f(x) \in]-\infty; B[\text{ (c'est-à-dire } f(x) < B)$$

- Avec les quantificateurs, la traduction en symbolique mathématique de ces deux définitions est :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty; \alpha[, A < f(x)$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty; \alpha[, f(x) < B$$

Proposition 2 (limites de fonctions usuelles)

(1) $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

(2) Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(3) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Démonstration : admise

1.2. Limites en un nombre réel

Définition 4
Soient f une fonction numérique d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et a un réel.
(1) On dit que f est définie localement à droite de a lorsqu'il existe un réel r strictement positif tel que l'intervalle $]a; a+r[$ est inclus dans $\mathcal{D}_f$.
(2) On dit que f est définie localement à gauche de a lorsqu'il existe un réel r strictement positif tel que l'intervalle $]a-r; a[$ est inclus dans $\mathcal{D}_f$.
(3) On dit que f est définie au voisinage de a lorsqu'il existe un réel r strictement positif tel que l'intervalle $]a-r; a+r[$ est inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Exemple 4
On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
Cette fonction f est définie localement à droite de 1, est définie au voisinage de tout réel strictement supérieur à 1, mais n'est pas définie localement à gauche de 1.

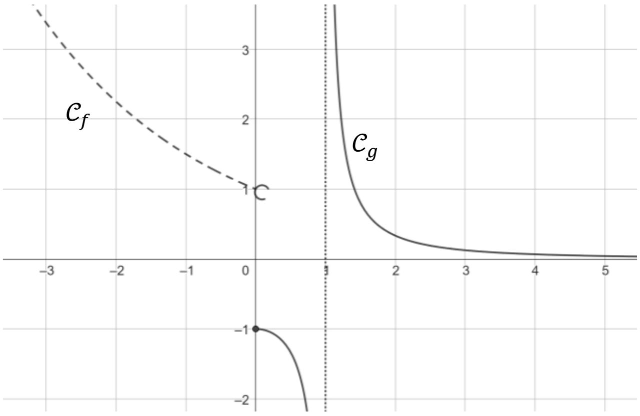
Définition 5 (limite à gauche ou à droite en un réel)
Soient a et ℓ deux réels.
(1) Soit f une fonction numérique définie localement à droite de a.
- On dit que f admet ℓ comme limite à droite en a, ce que l'on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « proches » que l'on veut de ℓ, dès que x est suffisamment « proche » de a tout en restant strictement supérieur à a.
- On dit que f admet $+\infty$ comme limite à droite en a, ce que l'on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut, dès que x est suffisamment « proche » de a tout en restant strictement supérieur à a.
- On dit que f admet $-\infty$ comme limite à droite en a, ce que l'on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut en valeur absolue tout en étant négatifs, dès que x est suffisamment « proche » de a tout en restant strictement supérieur à a.
(2) Soit f une fonction numérique définie localement à gauche de a.
- On dit que f admet ℓ comme limite à gauche en a, ce que l'on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « proches » que l'on veut de ℓ, dès que x est suffisamment « proche » de a tout en restant strictement inférieur à a.
- On dit que f admet $+\infty$ comme limite à gauche en a, ce que l'on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut, dès que x est suffisamment « proche » de a tout en restant strictement inférieur à a.
- On dit que f admet $-\infty$ comme limite à gauche en a, ce que l'on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, lorsque les nombres $f(x)$ sont aussi « grands » que l'on veut en valeur absolue tout en étant négatifs, dès que x est suffisamment « proche » de a tout en restant strictement inférieur à a.

Exemple 5

Sur le graphique ci-dessous, sont représentées dans un repère orthogonal deux fonctions numériques f et g telles que :

$\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[$, $\mathcal{D}_g = [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -1 = g(-1)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = -\infty$ et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = +\infty$$



Remarque 3

(1) Donnons des définitions plus rigoureuses de $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$:

- On dit que f admet ℓ comme limite à droite en a, lorsque pour tout réel strictement positif ε (même arbitrairement proche de 0), il existe un réel strictement positif η, tel que :

$$\forall x \in]a; a+\eta[, f(x) \in]\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon[\text{ (c'est-à-dire } \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon)$$

- On dit que f admet $+\infty$ comme limite à droite en a, lorsque pour tout réel A (même arbitrairement « grand »), il existe un réel strictement positif η, tel que :

$$\forall x \in]a; a+\eta[, f(x) \in]A; +\infty[\text{ (c'est-à-dire } A < f(x))$$

- On dit que f admet $-\infty$ comme limite à droite en a, lorsque pour tout réel B (même négatif et arbitrairement « grand » en valeur absolue), il existe un réel strictement positif η, tel que :

$$\forall x \in]a; a+\eta[, f(x) \in]-\infty; B[\text{ (c'est-à-dire } f(x) < B)$$

- Avec les quantificateurs, la traduction en symbolique mathématique de ces trois définitions est :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}, \forall\, x \in]a; a+\eta[, \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$$
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \in]a; a+\eta[, f(x) \in]A; +\infty[$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \in]a; a+\eta[, f(x) \in]-\infty; B[$$

(2) Donnons des définitions plus rigoureuses de $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$:

- On dit que f admet ℓ comme limite à droite en a, pour tout réel strictement positif ε (même arbitrairement proche de 0), il existe un réel strictement positif η, tel que :

$$\forall x \in]a-\eta; a[, f(x) \in]\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon[\text{ (c'est-à-dire } \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon)$$

- On dit que f admet $+\infty$ comme limite à droite en a, pour tout réel A (même arbitrairement « grand »), il existe un réel strictement positif η, tel que :

$$\forall x \in]a-\eta; a[, f(x) \in]A; +\infty[\text{ (c'est-à-dire } A < f(x))$$

- On dit que f admet $-\infty$ comme limite à droite en a, pour tout réel B (même négatif et arbitrairement « grand » en valeur absolue), il existe un réel strictement positif η, tel que :

$$\forall x \in]a-\eta; a[, f(x) \in]-\infty; B[\text{ (c'est-à-dire } f(x) < B)$$

- Avec les quantificateurs, la traduction en symbolique mathématique de ces trois définitions est :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}, \forall\, x \in]a-\eta; a[, \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \in]a-\eta; a[, f(x) \in]A; +\infty[$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \in]a-\eta; a[, f(x) \in]-\infty; B[$$

<u>Proposition 3</u> (limites de fonctions usuelles)

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

(2) Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

<u>Démonstration :</u> admise

<u>Remarque 4</u>

Dans quels cas peut-on affirmer qu'une fonction f admet une limite en un réel a ?

Étant donnés un réel a et une fonction f définie au voisinage de a, f admet une limite en a lorsque les différents comportements de f au voisinage de a coïncident. Plus précisément on a la définition suivante :

<u>Définition 6</u> (limite en un réel)

Soient a un réel et f une fonction définie localement à droite, localement à gauche ou au voisinage de a.

- Cas où f est définie localement à droite de a, mais pas en a, ni localement à gauche de a : on dit que f admet une limite en a lorsque f admet une limite à droite en a. Dans ce cas, on notant α cette limite (qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$), on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$.
- Cas où f est définie localement à gauche de a, mais pas en a, ni localement à droite de a : on dit que f admet une limite en a lorsque f admet une limite à gauche en a. Dans ce cas, on notant α cette limite (qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$), on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$.
- Cas où f est définie localement à droite de a, en a, mais pas localement à gauche de a : on dit que f admet une limite en a lorsque f admet une limite finie à droite en a égale à $f(a)$. Dans ce cas, on notant α cette limite (qui ne peut pas être $+\infty$ ou $-\infty$), on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$.
- Cas où f est définie localement à gauche de a, en a, mais pas localement à droite de a : on dit que f admet une limite en a lorsque f admet une limite finie à gauche en a égale à $f(a)$. Dans ce cas, on notant α cette limite (qui ne peut pas être $+\infty$ ou $-\infty$), on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$.
- Cas où f est définie localement à droite de a, localement à gauche de a, mais pas en a : on dit que f admet une limite en a lorsque f admet une limite à droite en a, une limite à gauche en a, et que ces deux limites sont égales. Dans ce cas, on notant α cette limite (qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$), on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$.
- Cas où f est définie localement à droite de a, localement à gauche de a et en a : on dit que f admet une limite en a lorsque f admet une limite finie à droite en a, une limite finie à gauche en a, et que ces deux limites sont égales à $f(a)$. Dans ce cas, on notant α cette limite (qui ne peut pas être $+\infty$ ou $-\infty$), on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$.

<u>Illustration de ces 6 cas :</u>

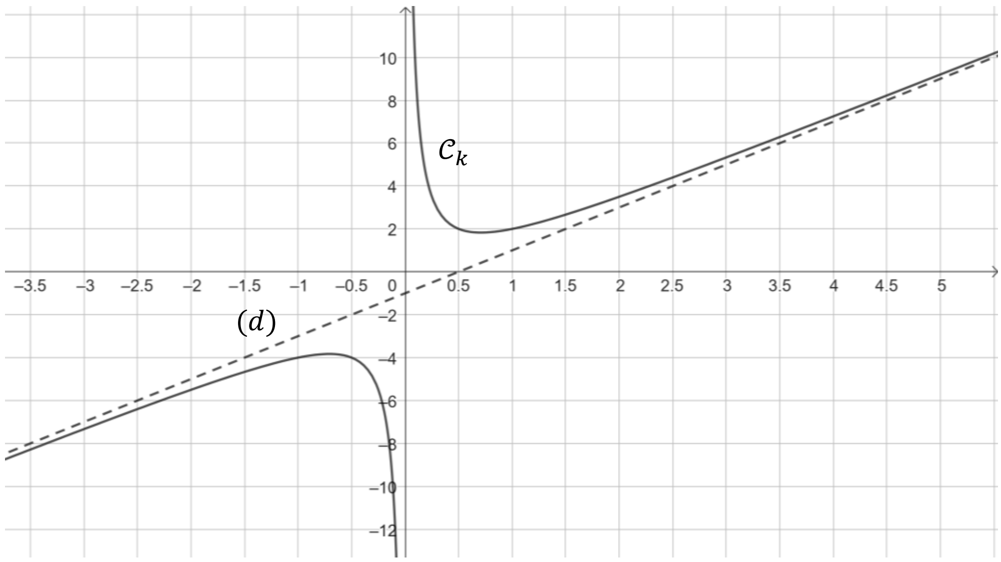
Théorème 1 (unicité de la limite)
La lettre α désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$. Soit f une fonction définie localement à gauche, localement à droite ou au voisinage de α.
La fonction f admet au plus une limite en α.

Démonstration : admise

1.3. Asymptotes et branches infinies

Définition 7 (asymptotes horizontales et obliques)
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie aux voisinages de $-\infty$ ou de $+\infty$. On se place dans un repère orthogonal du plan.
(1) Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est dite asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
(2) Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$), la droite d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exemple 6
(1) L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction inverse aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
(2) Dans l'exemple 2 précédent, la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
(3) Comme on peut le constater sur le graphique ci-dessous, la droite (d) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique, aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, à la courbe représentative $\mathcal{C}_k$ de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$:



Justifions ce résultats algébriquement !

Définition 8 (asymptotes verticales)
On se place dans un repère orthogonal du plan.
Soient a un réel et f une fonction définie ou non en a. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ comme asymptote verticale lorsque l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :
- La fonction f est définie localement à droite de a et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$;
- La fonction f est définie localement à droite de a et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$;
- La fonction f est définie localement à gauche de a et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$;
- La fonction f est définie localement à gauche de a et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$.

Exemple 7
(1) L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de la fonction inverse.
(2) Dans l'exemple 5 précédent, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction g.

Définition 9 (branches paraboliques)
Soit f une fonction numérique définie aux voisinages de $-\infty$ ou de $+\infty$. On se place dans un repère orthogonal du plan. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
(1) On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ (ce qui signifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$).
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
(2) On suppose que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ possède en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ possède en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Exemple 8
(1) Justifions que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
(2) Justifions que les courbes représentatives des fonctions carré et cube admettent en $-\infty$ et en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

1.3. Opérations sur les limites

L'objectif de ce paragraphe est de présenter différents résultats qui permettent de calculer la limite d'une fonction construite explicitement à partir des fonctions de référence.

1.3.1. Limites par opérations

Dans ce paragraphe, f et g désignent 2 fonctions, ℓ et ℓ' désignent deux réels et « * » désigne $+\infty$, $-\infty$ ou un réel.

(i) Limite d'une somme de fonctions

$\lim\limits_{x\to *} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to *} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to *} (f+g)(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\boldsymbol{FI}$

(ii) Limite d'un produit de fonctions

$\lim\limits_{x\to *} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to *} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty \; ou -\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to *} (f\times g)(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\boldsymbol{FI}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

(iii) Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim\limits_{x\to *} f(x) =$	$\ell\neq 0$	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to *} (\frac{1}{f})(x) =$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

(iv) Limite du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to *} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty \; ou -\infty$
$\lim\limits_{x\to *} g(x) =$	$\ell'\neq 0$	$+\infty \; ou -\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty \; ou -\infty$
$\lim\limits_{x\to *} (\frac{f}{g})(x) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\boldsymbol{FI}$

$\lim\limits_{x\to *} f(x) =$	$\ell>0 \; ou +\infty$	$\ell>0 \; ou +\infty$	$\ell<0 \; ou -\infty$	$\ell<0 \; ou -\infty$	0
$\lim\limits_{x\to *} g(x) =$	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	0
$\lim\limits_{x\to *} (\frac{f}{g})(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\boldsymbol{FI}$

Remarque 5

Dans les tableaux ci-dessus « FI » signifie « forme indéterminée ». Il faut alors transformer l'expression de la fonction de sorte à pouvoir lever l'indétermination.

Exemple 9

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}+\sqrt{x})$

(2) $\lim_{x\to-\infty} (x^3\sqrt{x})$
(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}$
(4) $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{x+2}{x-1}$
(5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2-x}$
(6) $\lim_{x\to4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$
(7) $\lim_{x\to-\infty} 3x^2+x-1$
(8) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-3x+1}{x^2+8}$

Remarque 6
Pour lever l'indétermination plus rapidement dans les cas (7) et (8) de l'exemple précédent, on dispose du théorème suivant :

Théorème 2
(1) La limite d'une fonction polynomiale, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
(2) La limite d'une fonction rationnelle, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, est égale à la limite du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par celui du dénominateur.

Démonstration : admise

Exemple 10
Reprenons les cas (7) et (8) de l'exemple précédent.

1.3.2. Limite de la composée de deux fonctions

Théorème 3
Les lettres α, β et γ désignent chacune un réel, $-\infty$ ou $+\infty$. Soient f une fonction définie au voisinage de α et g une fonction définie au voisinage de β, telles que :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \text{ et } \lim_{x\to\beta} g(x) = \gamma$$

Alors $\lim_{x\to\alpha} (g \circ f)(x) = \gamma$.

Démonstration : admise

Exemple 11
Calculer les limites suivantes :
(1) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2}$
(2) $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \left(\frac{1}{x^3}+x\right)^2$

Remarque 7
(1) Le résultat du théorème précédent sous-entend que la fonction $g \circ f$ est bien définie au voisinage de α.
(2) Le théorème précédent s'adapte aux cas où l'on s'intéresse à des limites à gauche ou à droite pour des fonctions définies localement à gauche ou à droite de α et β.

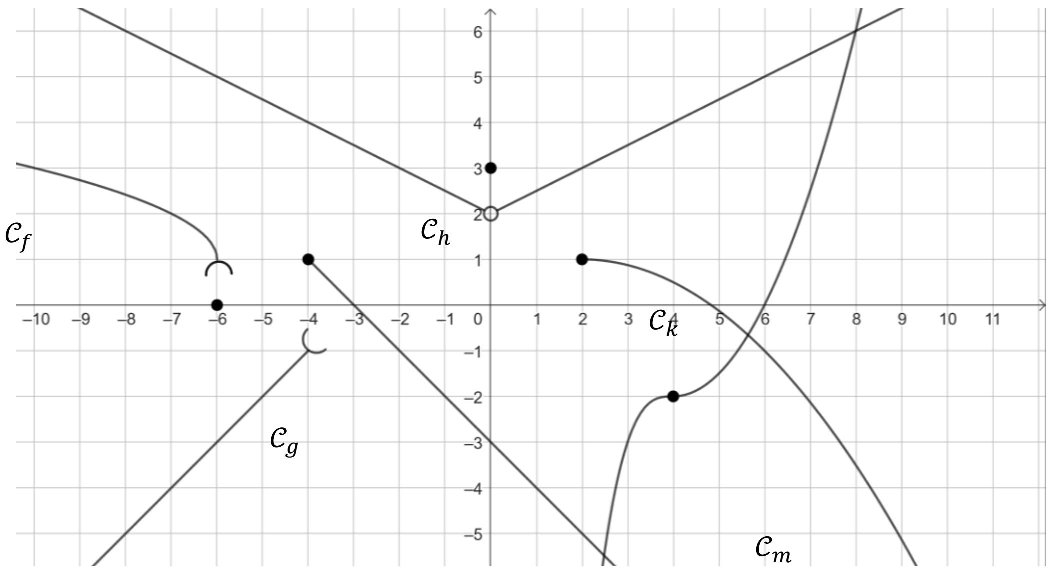
2. Fonctions continues

2.1. Définition

<u>Définition 10</u>
Soient f une fonction numérique et a un réel appartenant à l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
La fonction f est dite continue en a lorsque f admet $f(a)$ comme limite en a.

<u>Remarque 8</u>
(1) En reprenant la propriété précédente en d'autres termes, la fonction f est continue en a lorsque le réel $f(x)$ est aussi proche que l'on veut du réel $f(a)$ dès que x est suffisamment proche de a.
(2) De manière intuitive, la fonction f est continue en a lorsque sa courbe représentative ne présente pas de « trou » au voisinage de a.

<u>Exemple 12</u>
(1) On considère ci-dessous les courbes représentatives $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g, \mathcal{C}_h, \mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_m$ des fonctions f, g, h, k et m respectivement, dans un repère orthonormé du plan :



- La fonction f est définie sur $]-\infty; -6]$. Elle n'est pas continue en -6, puisque $\lim\limits_{\substack{x \to -6 \\ x < -6}} f(x) \neq f(-6)$.

En effet :
$$\lim_{\substack{x \to -6 \\ x < -6}} f(x) = 1 \text{ et } f(-6) = 0 \neq 1$$
- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas continue en -4, puisque sa limite en -4 n'existe pas.
En effet :
$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ x < -4}} g(x) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} g(x) = 1 = g(-4) \text{, donc } \lim_{\substack{x \to -4 \\ x < -4}} g(x) \neq \lim_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} g(x)$$
- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas continue en 0, puisque sa limite en 0 n'existe pas. En effet :
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} h(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = 2 \text{, mais } h(0) = 3 \neq 2$$
- La fonction k est définie sur $[2; +\infty[$. Elle est continue en 2, puisque $\lim\limits_{x \to 2} k(x) = k(2)$. En effet :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} k(x) = 1, \text{ donc } \lim_{x\to 2} k(x) = 1$$ (la fonction k n'est pas définie à gauche de -2) et $k(2) = 1$

- La fonction m est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en 4, puisque $\lim_{x\to 4} m(x) = m(4)$. En effet :

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} m(x) = \lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} m(x) = -2 = m(4), \text{ donc } \lim_{x\to 4} m(x) \text{ existe et est égale à } m(4)$$

(2) Calculer $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2x^2-3x+2}{x-1}$ et $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+2}$.

<u>Définition 11</u>

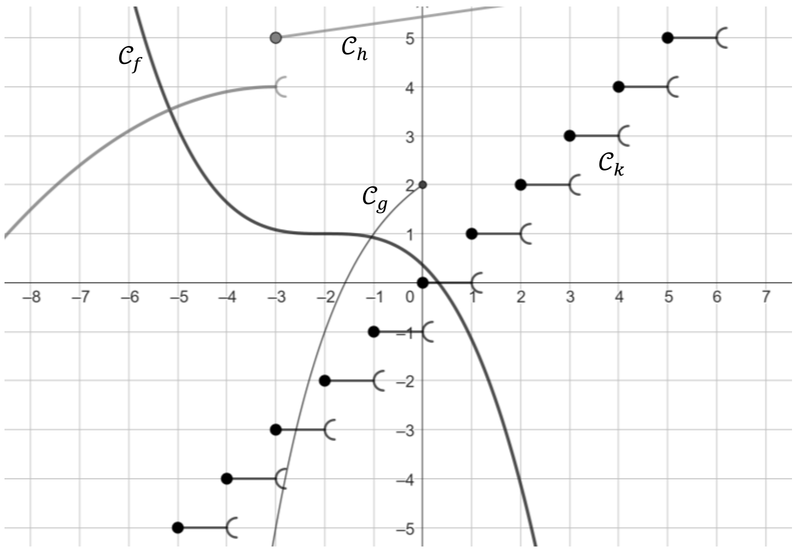
Soient f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $\mathcal{D}$ un ensemble inclus dans $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est continue en tout réel de $\mathcal{D}$.

<u>Remarque 9</u>

Intuitivement, la fonction f est continue sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$, lorsque sa courbe représentative peut être tracée sur cet intervalle sans lever le crayon.

<u>Exemple 13</u>

Sur le graphique ci-dessous, sont représentées dans un repère orthonormé quatre fonctions numériques f, g, h et k telles que :
- la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$;
- la fonction g est définie et continue sur $]-\infty; 0]$ (elle est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$);
- la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, est continue sur l'intervalle $]-\infty; -3[$, est continue sur l'intervalle $]-3; +\infty[$ mais n'est pas continue en -3 (puisque $\lim_{x\to -3} h(x)$ n'existe pas).
- la fonction k est définie sur $\mathbb{R}$, est continue sur tous les intervalles $]k; k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, mais n'est continue en aucun entier, puisque la limite de k n'existe en aucun des nombres entiers.



La fonction k est appelée fonction partie entière (inférieure). Elle est définie pour tout réel x par $k(x) = \lfloor x \rfloor$, où la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier directement inférieur ou égal à x (c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$)

Proposition 4
Les fonctions de référence (c'est-à-dire la fonction carré, la fonction cube, les fonctions puissances entières positives, la fonction inverse, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, les fonctions affines et plus généralement les fonctions polynomiales, ainsi que les fonctions rationnelles) sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.

Démonstration : admise

2.2. Opérations sur les fonctions continues

Remarque 10
Comme on vient de la voir dans la remarque précédente, les fonctions de référence sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs. Nous donnons dans la suite un moyen pratique de prouver la continuité en un point, ou sur un intervalle, pour une fonction construite à partir de ces fonctions usuelles.

Proposition 5
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ respectivement, I un intervalle réel inclus dans $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, a un réel de I et λ un réel.
(1) Si f et g sont continues en a alors $f + g$ est continue en a ;
(2) Si f et g sont continues en a alors $f \times g$ est continue en a ;
(3) Si f est continue en a, alors $\lambda . f$ est continue en a ;
(4) Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a ;
(5) Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration : admise

Corollaire 1
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ respectivement, I un intervalle réel inclus dans $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ et λ un réel.
(1) Si f et g sont continues sur I alors $f + g$ est continue sur I ;
(2) Si f et g sont continues sur I alors $f \times g$ est continue sur I ;
(3) Si f est continue sur I, alors $\lambda . f$ est continue sur I ;
(4) Si f et g sont continues sur I et que g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I ;
(5) Si f est continue sur I et que g est continue en tout réel de $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration : immédiate d'après la propriété précédente.

Remarque 11
Dans un tableau de variations d'une fonction, on convient que toute flèche oblique, en plus de traduire la stricte monotonie, traduit également la continuité de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple 14
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 1 \text{ si } x \leq 0 \\ -\sqrt{x} + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.