Thème 9 - Probabilités - cours n°1 : espaces probabilisés finis

Avant d'aborder ce cours, le lecteur relira attentivement le thème 6 sur les ensembles.

1. Univers et événements d'une épreuve aléatoire

Définition 1 (épreuve aléatoire)
Une **épreuve aléatoire** (ou **expérience aléatoire**) est une expérience soumise au hasard dont on peut prévoir les résultats possibles, mais dont on ne connaît pas le résultat qui va apparaître avant de la réaliser.

Exemple 1
Jeux de pile ou face, lancer d'un dé à six faces, loto, tiercé, etc.

Remarque 1
« Aléatoire » signifie « soumis au hasard ».

Définition 2 (univers)
L'**univers** d'une expérience aléatoire, souvent noté Ω, est l'ensemble de tous les **résultats possibles**, encore appelés **issues** ou **éventualités**.

Remarque 2
Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que l'univers Ω est fini.

Exemple 2
(1) Lancer d'un dé à six faces classique :
$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$
(2) On arrive à un feu tricolore :
$$\Omega = \{\mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathcal{O}\}$$
(3) On lance trois fois de suite une pièce de monnaie :
$$\Omega = \{(p,p,p); (p,p,f); (p,f,p); (p,f,f); (f,p,p); (f,p,f); (f,f,p); (f,f,f)\}$$

Remarque 3
(1) Les issues d'une expérience aléatoire peuvent être des nombres, des lettres, des mots, des couples, des triplets, des ensembles non ordonnés à deux éléments, trois éléments, etc.
(2) Pour déterminer l'univers d'une expérience aléatoire, il peut être commode d'utiliser un tableau à double entrée ou un arbre des cas possibles (comme dans l'exemple précédent).

Définition 3 (événement)
Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
Un **événement** est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire une partie de l'univers, c'est-à-dire encore un sous-ensemble d'issues de l'univers.

Exemple 3

(1) Avec le dé à six faces, on considère l'événement :

A: « obtenir un nombre pair »

On a alors $A = \{2; 4; 6\}$.

(2) Avec le feu tricolore, on considère l'événement :

S: « on s'arrête »

On a alors $S = \{\mathcal{R}; \mathcal{O}\}$.

(3) Avec les trois lancers de la pièce de monnaie, on considère l'événement :

U: « on obtient exactement une fois pile »

On a alors $U = \{(p, f, f); (f, p, f); (f, f, p)\}$.

Remarque 4

(1) Comme on vient de le constater dans l'exemple précédent, pour définir un événement, on le décrit très souvent à l'aide d'une phrase.

(2) Avec le dé à six faces, soient les événements suivants :

A: « obtenir un nombre pair »

B: « obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 »

C: « obtenir un multiple de 13 »

D: « obtenir un multiple de 5 »

- Lorsque l'on obtient par exemple le chiffre 6, on dit que **l'événement A est réalisé**. On dit aussi que 6 réalise l'événement A.
- On a $B = \Omega$. On dit que B est **l'événement certain**.
- On a aussi $C = \{\ \} = \emptyset$. On dit que C est **l'événement impossible**.
- Enfin $D = \{5\}$. L'événement D est constitué d'une seule issue, on dit alors que D est un **événement élémentaire**.

2. Opérations sur les événements

Définition 4 (opérations usuelles sur les événements)

Soient A et B deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

(1) On appelle **événement contraire de l'événement A**, ce que l'on note $\bar{\mathbf{A}}$ ou $\mathcal{C}_{\Omega}(A)$, l'ensemble de toutes les issues de l'univers qui ne réalisent pas A. C'est-à-dire $\bar{A} = \Omega \backslash A$.

(2) On appelle **réunion des événements A ou B**, ce que l'on note $\boldsymbol{A \cup B}$, l'ensemble de toutes les issues de l'univers qui réalisent A **ou** B, c'est-à-dire les issues qui réalisent **au moins l'un** de ces deux événements.

(3) On appelle **intersection des événements A et B**, ce que l'on note $\boldsymbol{A \cap B}$, l'ensemble de toutes les issues de l'univers qui réalisent A **et** B, c'est-à-dire les issues qui réalisent **les deux** événements **à la fois**.

(4) On dit que l'événement **A implique** l'événement **B** lorsque $\boldsymbol{A \subset B}$, c'est-à-dire lorsque toute issue réalisant l'événement A réalise également l'événement B.

Remarque 5

(1) Un événement est un sous-ensemble de l'univers. Aussi, nous ne rappellerons pas ici au lecteur avisé toutes les propriétés utiles déjà vues dans le thème précédent sur les ensembles (associativité,

commutativité, distributivité, formules de Morgan, passage au complémentaire, inclusions classiques, etc.).
(2) Lorsque l'intersection de deux événements est vide, on dit que ces deux événements sont **incompatibles**.
(3) De manière générale, on a toujours $A \cap \overline{A} = \emptyset$, c'est-à-dire qu'un événement et son contraire sont toujours incompatibles.

Exemple 4

Avec le dé à six faces, soient les événements suivants :

A: « obtenir un nombre pair »

D: « obtenir un multiple de 5 »

E: « obtenir un multiple de 3 »

F: « obtenir un nombre supérieur ou égal à 2 »

On a alors :

$$\bar{A} = \{1; 3; 5\}$$
$$A \cap E = \{6\}$$
$$A \cup E = \{2; 3; 4; 6\}$$
$$\bar{A} \cap \bar{E} = \overline{A \cup E} = \{1; 5\}$$

C'est-à-dire :

$\bar{A}$: « obtenir un nombre impair »

$A \cap E$: « obtenir un nombre à la fois pair et multiple de 3 »

$A \cup E$: « obtenir un nombre au moins pair ou multiple de 3 »

$\bar{A} \cap \bar{E} = \overline{A \cup E}$: « obtenir un nombre qui n'est ni pair ni multiple de 3 »

En outre, l'événement $A \cup E$ implique l'événement F, puisque $A \cup E \subset F$.
Enfin, les événements A et D sont incompatibles (puisque $A \cap D = \emptyset$).

Définition 5 (système complet d'événements)
Soient n un entier naturel non nul et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire. On dit que cette famille est un **système complet d'événements de l'univers Ω** lorsque :
- les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles (c'est-à-dire, pour tout couple (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$) ;
- la réunion des événements $A_1, \ldots, A_n$ est égale à l'univers Ω (c'est-à-dire $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$).

Exemple 5

(1) Soit A un événement d'un univers Ω. Alors la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements de l'univers Ω.
(2) Avec le dé à six faces, soient les événements $G = \{1; 2\}$, $H = \{3; 4\}$ et $K = \{5; 6\}$. Alors la famille (G, H, K) est un système complet d'événements de l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

3. Calcul des probabilités

Définition 6 (probabilité, espace probabilisé)
Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties.
(1) On appelle **probabilité sur $\boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)}$** toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ vérifiant :
- $P(\Omega) = 1$;
- pour tous événements A et B incompatibles de l'univers Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
(2) Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Définition 7 (probabilité uniforme, équiprobabilité)
Soient une expérience aléatoire d'univers Ω, avec Ω de cardinal un entier naturel n non nul, ainsi que $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties.
(1) On dit alors que l'on munit $\mathcal{P}(\Omega)$ de la **probabilité uniforme** lorsque toutes les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité égale à $\frac{1}{n}$.
(2) Dans ce cas, on dit que l'on est en **situation d'équiprobabilité**.

Exemple 6
On considère un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. On lance le dé et on considère l'événement

E: « obtenir un multiple de 3 »

Déterminer la probabilité de l'événement E dans les deux cas suivants :
(1) la probabilité d'obtenir un chiffre est proportionnelle à ce chiffre ;
(2) le dé est parfaitement équilibré.

Proposition 1
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. On a les résultats suivants :
(1) $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$;
(2) pour tout événement A de l'univers Ω, $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$;
(3) pour tout événement A de l'univers Ω, $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$;
(4) pour tous événements A et B de l'univers Ω tels que $\boldsymbol{A \subset B}$, $\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$;
(5) pour tous événements A et B de l'univers Ω, $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ (**formule de Poincaré**) ;
(6) pour tous événements **$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ incompatibles** de l'univers Ω, $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$;
(7) plus généralement, pour toute famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements de l'univers Ω **deux à deux incompatibles**, $\boldsymbol{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$.

Exemple 7
On reprend le dé truqué de la situation (1) de l'exemple 6 précédent. On considère alors les événements :

A: « obtenir un nombre pair »

E: « obtenir un multiple de 3 »

(1) Calculer $P(A)$;
(2) Calculer $P(A \cap E)$ et en déduire $P(A \cup E)$.
(3) En déduire $P(\bar{A} \cap \bar{E})$.

Théorème 1
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé où P est la **probabilité uniforme** sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On a alors :

pour tout événement A de l'univers Ω, $\boldsymbol{P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$

Exemple 8
Reprendre l'exemple 7 précédent, mais cette fois en situation d'équiprobabilité.

Théorème 2 (**formule des probabilités totales**, première version)
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, n un entier naturel non nul et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de l'univers Ω. On a alors :

pour tout événement B de l'univers Ω, $\boldsymbol{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}$

Remarque 6
(1) (Cas particulier du théorème précédent)
De manière générale, avec A un événement d'un univers Ω, puisque $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements de l'univers Ω, la formule des probabilités totales donne :

pour tout événement B de l'univers Ω, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

(2) Nous verrons plus tard une version beaucoup plus commode de cette formule.

Exemple 9
Dans une salle de classe, on questionne un élève au hasard. La probabilité pour que cet élève soit allé au cinéma durant les 15 derniers jours est de 0,2 . La probabilité pour que cet élève soit une fille étant allée au cinéma durant les 15 dernier jours est 0,09. Quelle est la probabilité pour que cet élève soit un garçon étant allé au cinéma durant les 15 dernier jours ?