Thème 10 - Analyse - cours n°5 : dérivation, variations et convexité

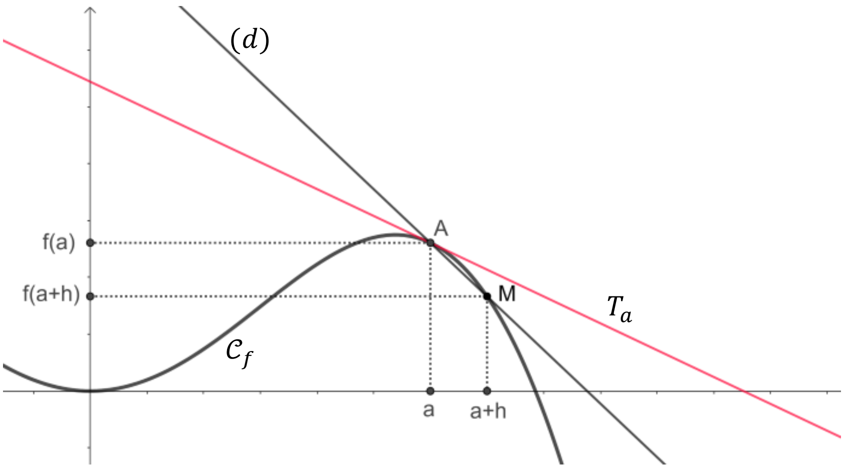
Dans tout ce chapitre les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles non réduits à un unique réel.

1. Fonctions dérivables

1.1. Nombre dérivé

1.1.1. Introduction

Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et a un réel de $\mathcal{D}_f$ fixé.
On considère, dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, le point $\mathrm{A}(a; f(a))$ et le point variable $\mathrm{M}(a+h;\ f(a+h))$, où h est un réel tel que $a+h \in \mathcal{D}_f$.



Pour $h \neq 0$ tel que $a+h \in \mathcal{D}_f$, le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite $(d) = (\mathrm{AM})$.
Ce rapport est appelé le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$.
Lorsque h tend vers 0, le point $\mathrm{M}(a+h; f(a+h))$ se rapproche, sur la courbe de f, du point $\mathrm{A}(a; f(a))$ et la droite (AM) tend à occuper une position limite (lorsque celle-ci existe) : la droite T_a, appelée tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a.
La valeur du taux d'accroissement tend alors vers le coefficient directeur de la droite T_a, lorsque cette dernière existe.

1.1. 2. Définition

Définition 1 (dérivabilité en un réel, nombre dérivé)
Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et a un réel de $\mathcal{D}_f$ fixé.
(1) Pour $h \neq 0$ tel que $a+h \in \mathcal{D}_f$, on note $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce nombre est appelé taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$.

(2) On dit que la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, la limite de $\tau_a(h)$ lorsque h tend vers 0 existe et est finie.

Le cas échéant, on note alors $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce nombre est appelé nombre dérivé de f en a.

(3) On dit que la fonction f est dérivable à gauche en a si, et seulement si, la limite à gauche de $\tau_a(h)$ lorsque h tend vers 0 existe et est finie.

Le cas échéant, on note alors $f'_g(a) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \tau_a(h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce nombre est appelé nombre dérivé à gauche de f en a.

(4) On dit que la fonction f est dérivable à droite en a si, et seulement si, la limite à droite de $\tau_a(h)$ lorsque h tend vers 0 existe et est finie.

Le cas échéant, on note alors $f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \tau_a(h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce nombre est appelé nombre dérivé à droite de f en a.

Remarque 1

Avec les notations de la définition précédente :

(1) Puisque f est définie sur $\mathcal{D}_f$ non réduit à un unique réel, la fonction $h \mapsto \tau_a(h)$ est définie à droite de 0 ou à gauche de 0 (ce « ou » étant, on le rappelle, inclusif !). Le lecteur révisera alors ce qui signifie l'existence de la limite en 0 de la fonction $h \mapsto \tau_a(h)$, dans ces différents cas.

(2) En posant $x = a + h$, on a une définition équivalente :

Pour $x \neq a$ tel que $x \in \mathcal{D}_f$, on note $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ le taux d'accroissement de la fonction f entre a et x. La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, la limite de $\tau_a(x)$ lorsque x tend vers a existe et est finie. Le cas échéant, on note alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \tau_a(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ le nombre dérivé de f en a.

On redéfinit également de même les notions de dérivées à gauche et à droite avec ce même changement de variable :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \tau_a(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \tau_a(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Exemple 1

(1) Démontrons que la fonction carré f est dérivable en 2.

(2) Démontrons que la fonction inverse g est dérivable en -3.

(3) Démontrons que la fonction racine carrée k est dérivable en 1.

Proposition 1 (lien entre dérivée, dérivée à gauche et dérivée à droite)

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$ et a un réel de I privé de ses bornes. On a alors :

f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$

Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarque 2

Avec les notations précédentes, si f n'est pas définie à gauche (respectivement à droite) de a, f est dérivable en a équivaut à f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a.

Exemple 2

(1) La fonction racine carrée k est définie sur $\mathbb{R}^+$, mais n'est pas dérivable en 0, en effet :

$$\forall h \in \mathbb{R}^{*+}, \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x>0}} \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = +\infty$.

(2) La fonction valeur absolue v est définie sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 0, en effet :

$$\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}^{*-}, \frac{v(0+h)-v(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = -\frac{h}{h} = -1 \\ \forall h \in \mathbb{R}^{*+}, \frac{v(0+h)-v(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{v(0+h)-v(0)}{h} \neq \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{v(0+h)-v(0)}{h}$$

On en déduit que la fonction valeur absolue est dérivable à gauche en 0 (avec $v'_g(0) = -1$), dérivable à droite en 0 (avec $v'_d(0) = 1$), mais pas dérivable en 0 (puisque $v'_g(0) \neq v'_d(0)$).

(En fait $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(0+h)-v(0)}{h}$ n'existe pas.)

(3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{7}{3} \text{ si } x \in [0;3[\\ \frac{2}{x} \text{ sinon} \end{cases}$$

Justifier que la fonction f est continue et dérivable en 3.

Définition 2 (tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a)

Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et a un réel de $\mathcal{D}_f$ fixé. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On suppose que f est dérivable en a.

On appelle tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, ce que l'on note souvent T_a, l'unique droite passant par $\mathrm{A}(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Proposition 2 (équation réduite de la tangente)

Avec les notations de la définition précédente, T_a a pour équation cartésienne réduite :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 3

Donnons l'équation cartésienne réduite de la tangente T_1 à la courbe de la fonction racine carrée k au point d'abscisse 1.

Remarque 3

(1) Comme on l'a précédemment constaté, la fonction racine carrée k n'est pas dérivable en 0, puisque $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x>0}} \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = +\infty$. Néanmoins, puisque cette limite est infinie, sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0 qui est donc l'axe des ordonnées.

(2) Avec les notations précédentes, lorsque f est dérivable à gauche en a (respectivement à droite en a), on parle de demi-tangente à gauche (respectivement à droite) de coefficient directeur $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Proposition 3
Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et a un réel de $\mathcal{D}_f$ fixé. On a le résultat suivant :

$$f \text{ est dérivable en } a \Rightarrow f \text{ est continue en } a$$

Remarque 4
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et a un réel de $\mathcal{D}_f$ fixé. Donnons les implications valables entre les assertions « f est définie en a », « f est continue en a » et « f est dérivable en a », ainsi que des contre-exemples dans le cas où ces implications ne le sont plus.

1.2. Fonction dérivée

Définition 3 (dérivabilité sur un ensemble)
Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est dérivable en tous les réels de $\mathcal{D}$.

Proposition 4
Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$. On a le résultat suivant :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathcal{D} \Rightarrow f \text{ est continue sur } \mathcal{D}$$

Définition 4 (fonction dérivée)
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble de tous les réels de $\mathcal{D}_f$ en lesquels f est dérivable. On définit alors la fonction dérivée de la fonction f, notée f', qui à tout réel x de $\mathcal{D}'$ associe le nombre dérivé de f en x, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f' : \mathcal{D}' &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Exemple 4
Démontrons que la fonction cube $w: x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons la fonction w'.

Remarque 5
(1) Par définition du nombre dérivé, on a nécessairement $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_f$.
(2) Il est possible qu'une fonction soit continue sur un intervalle tout en n'étant dérivable en aucun réel de cet intervalle (mais une telle fonction est difficile à construire et à décrire).

Théorème 1 (dérivées des fonctions usuelles)
Soient $(m;p)$ un couple de réels fixés et n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
On a, avec les notations précédentes, le tableau suivant :

	$\mathcal{D}_f$	f	$\mathcal{D}'$	f'
(1)	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto p$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
(2)	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 1$
(3)	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto mx + p$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto m$

(4)	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 2x$
(5)	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto x^3$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 3x^2$
(6)	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
(7)	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
(8)	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$
(9)	$\mathbb{R}^+$	$x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque 6

On prendra garde, encore une fois, au fait qu'une fonction peut être définie en un réel sans y être dérivable ! Ainsi, la fonction racine carrée u est définie sur $\mathbb{R}^+$ mais seulement dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1.3. Opérations sur les fonctions et dérivation

Théorème 2 (formules de dérivation)

Soient λ un réel, I un intervalle réel, u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I.

On a le tableau suivant :

	condition éventuelle	la fonction f est définie sur I par :	f est dérivable sur I et pour tout réel x de I:
(1)	pas de condition	$f = \lambda.u$	$f'(x) = \lambda \times u'(x)$
(2)	pas de condition	$f = u + v$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
(3)	pas de condition	$f = u \times v$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
(4)	v ne s'annule pas sur I	$f = \frac{1}{v}$	$f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$
(5)	v ne s'annule pas sur I	$f = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

Remarque 7

(1) Les points (1) et (2) du théorème précédent assurent qu'une fonction polynomiale est dérivable (sauf restriction imposée par l'énoncé) sur $\mathbb{R}$.

(2) Le point précédent et le point (5) du théorème précédent assurent qu'une fonction rationnelle $f = \frac{u}{v}$ est dérivable (sauf restriction imposée par l'énoncé) sur $\mathbb{R}\backslash\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des racines de la fonction polynomiale v.

Exemple 5

Déterminons les fonctions dérivées des fonctions suivantes, après avoir donné leurs ensembles de dérivabilité :

(1) $f: x \mapsto 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 8$

(2) $g: x \mapsto 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 2x + 3$

(3) $h: x \mapsto x^3\sqrt{x} + 5$

(4) $k: x \mapsto \frac{3}{x^9} - \frac{7}{x^7} + \frac{3}{x^2} - 1$

(5) $\ell: x \mapsto 1 - \frac{3}{\sqrt{x}}$

(6) $m: x \mapsto \frac{3x+1}{-5x+3}$

Théorème 3 (de la composée de deux fonctions)
Soient u et v deux fonctions numériques dérivables respectivement sur des intervalles réels I et J, avec $v(J) \subset I$. La fonction $u \circ v$ est alors dérivable sur J et on a :

$$\forall x \in J, (u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$$

Théorème 4 (dérivée des composées usuelles)
Soient I un intervalle réel, v une fonction dérivable sur I et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a le tableau suivant :

	condition éventuelle	la fonction f est définie sur I et pour tout réel x de I :	f est dérivable sur I et pour tout réel x de I:
(1)	pas de condition	$f(x) = \left(v(x)\right)^n$	$f'(x) = nv'(x)\left(v(x)\right)^{n-1}$
(2)	v ne s'annule pas sur I	$f(x) = \frac{1}{\left(v(x)\right)^n} = \left(v(x)\right)^{-n}$	$f'(x) = -\frac{nv'(x)}{\left(v(x)\right)^{n+1}}$ $= -nv'(x)\left(v(x)\right)^{-n-1}$
(3)	v est strictement positive sur I	$f(x) = \sqrt{v(x)}$	$f'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$

Exemple 6
Déterminons les fonctions dérivées des fonctions suivantes, après avoir donné leurs ensembles de dérivabilité :

(1) $f: x \mapsto (3x^2 + 8)^{10}$ (2) $g: x \mapsto -\frac{3}{(2x+1)^7}$ (3) $h: x \mapsto 4\sqrt{4x - 5}$

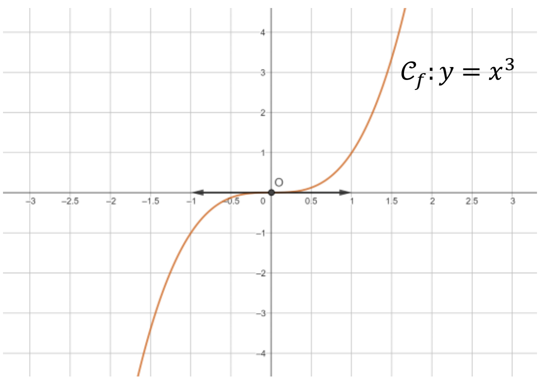
2. Lien avec le sens de variation et les extrema locaux éventuels

2.1. Lien avec les extrema locaux

Théorème 5 (condition nécessaire d'extremum local)
Soient I un intervalle réel, f une fonction définie et dérivable sur I et a un réel de I privé de ses bornes. On a l'implication suivante :

$$f \text{ admet un extremum local en } a \Rightarrow f'(a) = 0$$

Remarque 8
(1) La réciproque de l'implication donnée par le théorème précédent est bien entendu fausse. Par exemple, la fonction cube w ne présente sur $I = \mathbb{R}$ aucun extremum local en 0, pourtant sa dérivée (la fonction $w': x \mapsto 3x^2$) s'annule en 0 !



(2) On a en fait le résultat suivant :

Théorème 6 (condition nécessaire et suffisante d'extremum local)
Soient I un intervalle réel, f une fonction définie et dérivable sur I et a un réel de I privé de ses bornes. On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ admet un extremum local en } a \Leftrightarrow f'(a) = 0 \text{ et } f' \text{ change de signe en } a$$

Remarque 9
Avec les notations du théorème précédent :
- si f' s'annule en a pour passer de négative à positive, alors f admet le minimum local de $f(a)$ atteint en a ;
- si f' s'annule en a pour passer de positive à négative, alors f admet le maximum local de $f(a)$ atteint en a.

Exemple 7
Démontrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1.

2.2. Lien avec le sens de variation

Théorème 7 (caractérisation des fonctions constantes, monotones, strictement monotones)
Soient I un intervalle réel et f une fonction dérivable sur I.
On a les résultats suivants :
(1) Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
(2) Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
(3) Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.
(4) Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
(5) Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque 10
(1) Dans le théorème précédent, les réciproques des points (1), (2) et (3) sont vraies. On a donc les équivalences :

$$f \text{ est constante sur } I \text{ si, et seulement si, } f' \text{ est nulle sur } I\ ;$$
$$f \text{ est croissante sur } I \text{ si, et seulement si, } f' \text{ est positive ou nulle sur } I\ ;$$
$$f \text{ est décroissante sur } I \text{ si, et seulement si, } f' \text{ est négative ou nulle sur } I.$$

(2) Par contre les réciproques des points (4) et (5) sont fausses. Par exemple, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pourtant sa dérivée s'annule en 0 ! On a en fait le résultat suivant :

Théorème 8
Soient I un intervalle réel et f une fonction dérivable sur I. On a les résultats suivants :
(1) Si f' est positive ou nulle sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I.
(2) Si f' est négative ou nulle sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple 8

Ce théorème assure donc que la fonction cube est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car sa fonction dérivée $w' : x \mapsto 3x^2$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois (en 0) sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivée seconde, convexité

3.1. Dérivée seconde

Définition 5 (dérivée seconde)

Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f.

Lorsque f est dérivable sur I et que la dérivée f' de f est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I.

On appelle alors dérivée seconde de f, la dérivée de f', c'est-à-dire $(f')'$, que l'on note f'' ou $f^{(2)}$.

Exemple 9

Démontrer que la fonction racine carrée k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donner sa dérivée seconde.

3.2. Convexité

Définition 6

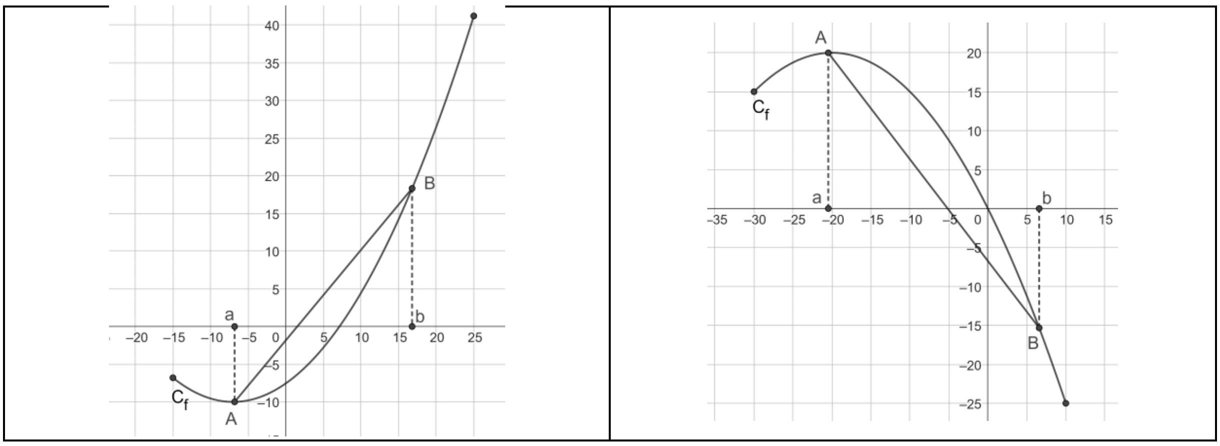
Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on considère les points $\mathrm{A}(a; f(a))$ et $\mathrm{B}(b; f(b))$.

(1) f est dite convexe sur I si, et seulement si, pour tous réels a et b de I avec $a < b$, $\mathcal{C}_f$ est située sur l'intervalle $[a; b]$ en dessous ou sur le segment $[\mathrm{AB}]$ (appelé aussi corde $[AB]$).

(2) f est dite concave sur I si, et seulement si, pour tous réels a et b de I avec $a < b$, $\mathcal{C}_f$ est située sur l'intervalle $[a; b]$ au-dessus ou sur le segment $[\mathrm{AB}]$.

Exemple 10

Sur les graphiques ci-dessous, la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-15; 25]$ et la fonction g est concave sur l'intervalle $[-30; 10]$:



Remarque 11
Avec les notation de la propriété précédente, on dit aussi que f est convexe (respectivement concave) sur I si, et seulement si, sa courbe représentative est située en dessous ou sur (respectivement au-dessus ou sur) ses cordes sur cet intervalle.

Définition 7
Soient f une fonction, I un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan et K un point du plan en lequel $\mathcal{C}_f$ admet une tangente.
On dit que K est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en K.

Exemple 11
Dans un repère orthogonal du plan d'origine $\mathcal{O}$, on conjecture que le point $\mathcal{O}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.

Théorème 9 (caractérisation de la convexité)
Soient I un intervalle et f une fonction deux fois dérivable sur cet intervalle. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) f est convexe (respectivement concave) sur I ;
(2) $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus (respectivement en dessous) ou sur ses tangentes sur l'intervalle I ;
(3) f' est croissante (respectivement décroissante) sur I ;
(4) f'' est positive (respectivement négative) ou nulle sur I.

Exemple 12
À l'aide des exemple 3 et 9, démontrer l'inégalité suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Proposition 5 (caractérisation d'un point d'inflexion)
Soient I un intervalle et f une fonction deux fois dérivable sur cet intervalle. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On a le résultat suivant :
$f^{(2)}$ s'annule et change de signe en a si, et seulement si, le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion

Exemple 13
Démontrons la conjecture émise dans l'exemple 11 précédent.