Thème 11 – Algèbre et logique - cours n°5 : calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, n et p désignent des entiers naturels strictement positifs.

1. Généralités

1.1. Premières définitions

Définition 1
(1) On appelle matrice à coefficients réels à n lignes et p colonnes, ou plus simplement matrice à n lignes et p colonnes, tout tableau à deux dimensions, délimité par deux parenthèses et composé de n lignes et p colonnes, constitué de nombres réels.
(2) L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ou même parfois $M_{n,p}$).
(3) Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$. Le couple (n,p) (c'est-à-dire le couple constitué du nombre de lignes et du nombre de colonnes de la matrice A) est appelé format de la matrice A.

Exemple 1
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0{,}5 & 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2{,}3 \\ \frac{1}{4} & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -\pi & -1{,}4 & 52 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont de matrices de formats respectifs $(3{,}3)$, $(4{,}2)$, $(1{,}5)$ et $(2{,}1)$.

Remarque 1
Comme pour tout objet mathématique, on peut utiliser une lettre pour noter une matrice (l'usage est une lettre majuscule).
On peut par exemple écrire : « on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$… ».
Lorsque l'on s'intéresse à une matrice non explicite, on peut de plus donner des noms aux éléments qu'elle contient.
On peut par exemple écrire : « soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{2,2}(\mathbb{R})$… » ou « soit $A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{3,2}(\mathbb{R})$… » ou « soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$… ».

Exemple 2
Donner l'écriture explicite de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Remarque 2
Avec les notations de l'exemple précédent, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le nombre réel $a_{i,j}$ est appelé terme (ou coefficient, ou encore élément) au croisement de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de la matrice A (ou terme d'indice (i,j) de la matrice A).

Exemple 3

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, le terme d'indice $(1,2)$ est 3 et le terme au croisement de la 2ème ligne et de la 1ère colonne est -1.

Définition 2

(1) Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont le même format et les mêmes termes aux mêmes places. Autrement dit, étant données deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le q}}$ (avec m et q deux entiers strictement positifs), on a l'équivalence suivante :

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ p = q \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{i,j} = b_{i,j} \end{cases}$$

(2) En particulier, deux matrices de même format sont égales si, et seulement si, elles ont les mêmes termes aux mêmes places.

Définition 3

(1) Une matrice est dite carrée si, et seulement si, elle a autant de lignes que de colonnes. Le nombre de lignes (ou de colonnes) est alors appelé ordre de la matrice. On note $M_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ou même parfois M_n) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

(2) Une matrice est dite matrice ligne si, et seulement si, elle possède une seule ligne (l'ensemble des matrices lignes à p colonnes est l'ensemble $M_{1,p}(\mathbb{R})$).

(3) Une matrice est dite matrice colonne si, et seulement si, elle possède une seule colonne (l'ensemble des matrices colonnes à n lignes est l'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$).

Exemple 4

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0{,}5 & 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est carrée d'ordre 3, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -\pi & -1{,}4 & 52 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne et la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Remarque 3

On identifie les matrices carrées d'ordre 1 aux nombres réels.

Définition 4

On appelle matrice nulle toute matrice dont les termes sont tous égaux à 0.

La matrice nulle de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée $0_{M_{n,p}(\mathbb{R})}$ (ou $0_{n,p}$) et la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$ est notée $0_{M_n(\mathbb{R})}$ (ou 0_n).

On peut également noter une matrice nulle 0, lorsque cela n'entraine pas d'ambigüité.

Exemple 5

$$0_{M_{3,2}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Matrices carrées particulières

<u>Définition 5</u>
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.
(1) Les nombres réels $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{n,n}$ sont appelés éléments (ou coefficients, ou encore termes) diagonaux de la matrice A.
(2) On dit que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$, $a_{i,j} = 0$.
(3) On dit que A est triangulaire inférieure si, et seulement si, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$, $a_{i,j} = 0$.
(4) On dit que A est diagonale si, et seulement si, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.
(5) On dit que A est la matrice identité si, et seulement si, A est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1.
La matrice identité d'ordre n est noté I_n (ou encore I, lorsque cela n'entraîne pas d'ambigüité).

<u>Exemple 6</u>

(1) Les éléments diagonaux de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0{,}5 & 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont 3, 3 et $\sqrt{2}$.

(2) La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

(3) La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

(4) La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est diagonale.

(5) La matrice $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

2. Somme et produit par un réel

<u>Définition 6</u>
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle somme des matrices A et B, ce que l'on note $A + B$, la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Remarque 4

(1) Avec les notations de la définition précédente, donnons une écriture explicite de la somme $A + B = C$.

(2) La somme de matrices n'est définie que pour des matrices de même format !

Exemple 7

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0,5 & 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0,5 & 4 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi & -1,4 & 52 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\pi & -1,4 & 52 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1 (propriétés de la somme de matrices)

Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$. On a les résultats suivants :

(1) $A + B = B + A$ (la somme de matrices est commutative) ;

(2) $A + 0_{M_{n,p}(\mathbb{R})} = 0_{M_{n,p}(\mathbb{R})} + A = A$ (la matrice nulle est l'élément neutre pour l'addition) ;

(3) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (la somme de matrices est associative).

Remarque 5

En pratique, le troisième point de la proposition précédente permet de ne pas écrire de parenthèses lorsqu'on considère une somme d'un nombre quelconque de matrices. Ainsi, avec les notations de la proposition précédente, on note $A + B + C$ plutôt que $(A + B) + C$ ou $A + (B + C)$.

Définition 7

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel.

On appelle produit de la matrice A par le réel λ, ce que l'on note $\lambda.A$, la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], c_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$$

Remarque 6

(1) Avec les notations de la définition précédente, donnons une écriture explicite du produit $\lambda.A$.

(2) Avec les notations de la définition précédente, avec $\lambda = -1$, la matrice $-1.A$, également notée $-A$, est appelée l'opposée de la matrice A.

(3) Avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, la somme $A + (-1).B$ (égale à $A + (-B)$ d'après le point précédent), également notée $A - B$, est appelée différence des matrices A et B.

Exemple 8

$$3.\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1,1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 21 \\ 3,3 & 0 & -3\sqrt{3} \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0,5 & 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & \frac{2}{3} \\ -0,5 & -3 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } 0.\begin{pmatrix} 1 & -\pi & -1,4 & 52 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_{1,5}(\mathbb{R})}.$$

Proposition 2 (propriétés du produit d'une matrice par un réel)
Soient A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, ainsi que λ et μ deux réels. On a les résultats suivants :
(1) $\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$;
(2) $(\lambda+\mu).A = \lambda.A + \mu.A$;
(3) $\lambda.(\mu.A) = (\lambda \times \mu).A$.

3. Produit

Définition 8 (produit d'une matrice par une matrice colonne)
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,1})_{1\le i\le p}$ une matrice de $M_{p,1}(\mathbb{R})$.
On appelle produit de la matrice A par la matrice B, ce que l'on note $A \times B$ ou AB, la matrice $C = (c_{i,1})_{1\le i\le n}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], c_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,1} \; (= a_{i,1}\times b_{1,1} + a_{i,2}\times b_{2,1} + \cdots + a_{i,p}\times b_{p,1})$$

Remarque 7
Avec les notations de la définition précédente, donnons une écriture explicite du produit AB.

Exemple 9
Avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ (où $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$), $D = \begin{pmatrix} 1 & -\pi & -1{,}4 & 52 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, effectuer les produits AB, AC, DE, FH et GH.

Définition 9 (produit de deux matrices : cas général)
Soient q un entier strictement positif, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{R})$.
On appelle produit de la matrice A par la matrice B, ce que l'on note $A \times B$ ou AB, la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$ de $M_{n,q}(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j} \; (= a_{i,1}\times b_{1,j} + a_{i,2}\times b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}\times b_{p,j})$$

Remarque 8
Avec les notations de la définition précédente :
(1) Donnons une écriture explicite du produit AB.
(2) La matrice AB est donc obtenue en juxtaposant les matrices colonnes obtenues en effectuant les produits matriciels $AC_1, AC_2, \dots, AC_q$, où, pour tout entier j de $[\![1,q]\!]$, C_j désigne la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$.

Exemple 10

Avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1{,}1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, effectuer les produits $AB, BA, BC, ED, AI_3, F0_{M_{3,2}(\mathbb{R})}$ et GH.

Remarque 9

(1) On pourra retenir que le produit matriciel est compatible lorsque l'on observe une relation de Chasles sur leurs formats :

$$\text{avec } A \in M_{n,\boldsymbol{p}}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in M_{\boldsymbol{p},q}(\mathbb{R}), AB \in M_{n,q}$$

En outre, lorsque le nombre de colonnes de A est distinct du nombre de lignes de B, le produit AB n'est pas défini.

Autrement dit, si A est une matrice de format (s, t) et B est une matrice de format(ℓ, m) (avec s, t, ℓ et m des entiers naturels non nuls) et que l'on a $t \neq \ell$, alors le produit AB n'est pas défini.

(2) Attention, comme on vient de la constater dans l'exemple précédent, le produit matriciel n'est pas commutatif !

(3) Attention (contrairement au produit de nombres réels), comme on vient de le constater également dans l'exemple précédent, on peut avoir une produit de deux matrices égal à la matrice nulle, sans qu'aucune de ces deux matrices ne soit la matrice nulle !

Proposition 3 (propriétés du produit de matrices)

Soient q et r deux entiers strictement positifs, λ un réel, A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, C et D deux matrices de $M_{p,q}(\mathbb{R})$, ainsi que E une matrice de $M_{q,r}(\mathbb{R})$. On a les résultats suivants :

(1) $I_n A = A$ et $AI_p = A$ (la matrice identité est l'élément neutre pour le produit) ;

(2) $0_{M_{q,n}(\mathbb{R})} A = 0_{M_{q,p}(\mathbb{R})}$ et $A 0_{M_{p,q}(\mathbb{R})} = 0_{M_{n,q}(\mathbb{R})}$;

(3) $A \times (\lambda. C) = (\lambda. A) \times C = \lambda. (AC)$;

(4) $A(CE) = (AC)E$ (le produit matriciel est associatif) ;

(5) $A(C + D) = AC + AD$ (distributivité à droite) ;

(6) $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité à gauche).

Exemple 11

(1) Soient q un entier strictement positif, A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, ainsi que C et D deux matrices de $M_{p,q}(\mathbb{R})$. « Développer » le produit $(3A - 4B)(2C - 5D)$.

(2) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. « Développer » les produits $(A + B)(A + B)$ et $(A - B)(A + B)$.

Remarque 10

(1) On pourra retenir que les propriétés des opérations sur les matrices sont les mêmes que celles sur les réels, modulo les deux différences capitales données dans les points (2) et (3) de la remarque précédente !

(2) En pratique la proposition précédente permet de traiter des questions de calculs matriciels en « gardant les matrices sous forme de lettres ». L'une des difficultés rencontrées dans des exercices

avec des matrices est précisément d'identifier quand il est pertinent de garder les matrices sous forme de lettres ou quand il convient plutôt de revenir aux expressions explicites de celles-ci.

4. Puissances d'une matrice carrée

Jusqu'à la fin de ce chapitre, on ne considère plus que des matrices carrées.

Définition 10

Soient A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ et m un entier naturel.

On définit la matrice A^m par :

$$\begin{cases} I_n \text{ si } m = 0 \\ A \times A \times \ldots \times A \text{ sinon (le produit comptant } m \text{ facteurs)} \end{cases}$$

Proposition 4

Soient k et ℓ deux entiers naturels non nuls, ainsi qu'une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{R})$.

On a :

(1) $A^k A^\ell = A^{k+\ell}$

(2) $(A^k)^\ell = A^{k\ell}$

Définition 11

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

On dit que les matrices A et B commutent si, et seulement si, $AB = BA$.

Exemple 12

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent. « Développer » le produit $(A + B)^2$.

Remarque 11

On notera la différence pour le calcul de $(A + B)^2$ selon que les matrices A et B commutent ou pas (cf. exemple 11(2) et 12):

$$(A + B)^2 = \begin{cases} A^2 + 2.AB + B^2 \text{ si } A \text{ et } B \text{ commutent} \\ A^2 + AB + BA + B^2 \text{ sinon} \end{cases}$$