Thème 12 - Probabilités - cours n°2 : conditionnement et indépendance en probabilités

1. Conditionnement - Probabilité d'une intersection d'événements

1.1. Probabilités conditionnelles

Définition 1 (probabilité conditionnelle)
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A un événement de l'univers Ω de probabilité non nulle. Pour tout événement B de l'univers Ω, on appelle **probabilité de B sachant A**, ce que l'on note $\boldsymbol{P_A(B)}$, le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Remarque 1
Avec les notations de la définition précédente :
(1) Le nombre $P_A(B)$ est aussi appelé probabilité de B sachant que A est réalisé ou probabilité de B conditionnellement à l'événement A.
(2) Le nombre $P_A(B)$ n'existe qu'à condition que le nombre $P(A)$ soit non nul, puisque l'on ne peut pas diviser par 0.
(3) En général, on a $P(A \cap B) \neq P_A(B)$. On peut même montrer que l'on a l'égalité $P(A \cap B) = P_A(B)$ uniquement lorsque $P(A) = 1$, c'est-à-dire uniquement lorsque l'événement A est certain. On veillera donc à ne pas confondre « intersection » et « sachant que ».
(4) Calculer des probabilités sachant A revient à calculer des probabilités avec A comme nouvel ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire considérée :
En effet, on a $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, ainsi on s'intéresse à la probabilité de $A \cap B$ relativement à la probabilité de A, au lieu de s'intéresser à $P(B) = \frac{P(B)}{1} = \frac{P(B)}{P(\Omega)} = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(\Omega)}$ que l'on peut interpréter comme la probabilité de B relativement à la probabilité de Ω (ou encore comme la probabilité de B sachant Ω).
Ainsi, calculer des probabilités sachant A revient à calculer des probabilités en supposant que l'événement A est réalisé.

Exemple 1
Dans une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3, on tire au hasard une première boule. Elle y est remise avec k autres boules portant également le numéro k, où k désigne le numéro de la boule obtenue.
(1) Donner la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro 3 au deuxième tirage sachant qu'on a obtenu une boule numérotée 3 au premier tirage. On considèrera pour cela les événements suivants :

A : « on obtient une boule portant le numéro 3 au premier tirage »

B : « on obtient une boule portant le numéro 3 au deuxième tirage »

(2) En déduire la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro 3 aux premier et deuxième tirages.

Proposition 1
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A un événement de l'univers Ω de probabilité non nulle.
On a le résultat suivant :
L'application $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ est une probabilité.
$$B \mapsto P_A(B)$$

Corollaire 1
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A un événement de l'univers Ω de probabilité non nulle.
Les propriétés des probabilités (c'est-à-dire les propriétés de la proposition 1 du thème 9) sont alors vérifiées par P_A. En particulier :
(1) $\boldsymbol{P_A(\emptyset) = 0}$;
(2) pour tout événement B de l'univers Ω, $\boldsymbol{0 \leq P_A(B) \leq 1}$;
(3) pour tout événement B de l'univers Ω, $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = 1 - P(B)}$;
(4) pour tous événements B et C de l'univers Ω tels que $\boldsymbol{B \subset C}$, $\boldsymbol{P_A(B) \leq P_A(C)}$;
(5) pour tous événements B et C de l'univers Ω, $\boldsymbol{P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)}$ (**formule de Poincaré**) ;
(6) pour tous événements B et C **incompatibles** de l'univers Ω, $\boldsymbol{P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)}$;
(7) plus généralement, pour toute famille $(B_1, \dots, B_n)$ d'événements de l'univers Ω **deux à deux incompatibles**, $\boldsymbol{P_A(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P_A(B_i)}$.

Remarque 2
En pratique, on ne détermine que rarement $P_A(B)$ à partir de $P(A \cap B)$ et de $P(A)$. On détermine plutôt $P(A \cap B)$ à partir de $P_A(B)$ et de $P(A)$ (ou à partir de $P_B(A)$ et de $P(B)$). On peut pour cela utiliser le résultat qui suit (comme vu dans l'exemple précédent).

Proposition 2
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A; B)$ un couple d'événements de l'univers Ω de probabilités non nulles. On a les résultats suivants :
(1) $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$;
(2) $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$.

Démonstration :

Remarque 3
Dans le cas où A ou B est de probabilité nulle, on a $P(A \cap B) = 0$. En effet, dans le cas $P(A) = 0$, on a $A \cap B \subset A$ et ainsi $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$, d'où le résultat (dans le cas $P(B) = 0$, l'inclusion $A \cap B \subset B$ permet de conclure de la même façon).

1.2. Formule des probabilités totales

Théorème 1 (**formule des probabilités totales**)
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, n un entier naturel non nul et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de l'univers Ω.
(1) Comme vu dans le thème 9, on rappelle la première version de la formule des probabilités totales :
pour tout événement B de l'univers Ω, $\boldsymbol{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}$
(2) En voici la deuxième version :

pour tout événement B de l'univers $\Omega, \boldsymbol{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P(A_i)P_{A_i}(B)}$

Démonstration : le (2) est une conséquence directe du (1) et de la proposition 2.

Exemple 2

On reprend la situation de l'exemple 1.

Déterminer la probabilité de l'événement B : « on obtient une boule portant le numéro 3 au deuxième tirage » . On notera pour cela, pour tout i de $[\![1; 3]\!]$, A_i l'événement : « on obtient une boule numérotée i au premier tirage » .

Remarque 4

On retiendra que cette formule permet de faire apparaitre des probabilités conditionnelles, ce qui peut s'avérer extrêmement utile, par exemple dans les situations faisant intervenir des expériences aléatoires successives dont les conditions évoluent selon les résultats obtenus.

1.3. Formule de Bayes

Théorème 2 (**formule de Bayes**)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

(1) Avec $(A; B)$ un couple d'événements de l'univers Ω de probabilités non nulles, on a :

$$\boldsymbol{P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}} \text{ (formule de Bayes)}$$

(2) Avec $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles de l'univers Ω, on a :

$$\boldsymbol{\forall i \in [\![1; n]\!], P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}} \text{ (formule de Bayes généralisée)}$$

Démonstration :

Exemple 3

On reprend la situation des exemples 1 et 2 précédents.

On note C l'événement « on obtient une boule portant le numéro 2 au deuxième tirage ».

Déterminer la probabilité que l'on ait tiré une boule numéro 3 au premier tirage sachant que l'on a obtenu une boule portant le numéro 2 au deuxième tirage.

Remarque 5

(1) On peut se permettre de ne pas apprendre par cœur la formule de Bayes car il est très facile de la retrouver, en revanche il est important de se souvenir que celle-ci permet, en quelque sorte, « d'inverser le sachant » ou de « remonter le temps ».

(2) Le théorème qui suit est une généralisation de la proposition 2 précédente.

1.4. Formule des probabilités composées

Théorème 3 (**formule des probabilités composées**)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, n un entier supérieur ou égal à 2 et $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements de l'univers Ω. On suppose que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

On a alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple 4
On dispose d'une urne contenant 4 boules blanches, 5 boules noires et 6 boules vertes.
(1) On effectue 4 tirages successifs et sans remise d'une boule dans l'urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir 1 boule blanche, 2 boules noires et 1 boule verte dans cet ordre.
On notera pour cela, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, les événements suivants :

B_i : « on obtient une boule blanche au i-ème tirage »

N_i : « on obtient une boule noire au i-ème tirage »

V_i : « on obtient une boule verte au i-ème tirage »

(2) On effectue 3 tirages successifs et sans remise d'une boule dans l'urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir 2 boules vertes et une boule noire.
(On utilisera les mêmes notations.)

Remarque 6
(1) Avec les notations du théorème précédent, soit un entier j appartenant à $[\![1, n-1]\!]$. On a alors :

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_j$$

Ainsi :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leq P\left(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_j\right)$$

On en déduit, puisque $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$:

$$0 < P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leq P\left(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_j\right)$$

Ainsi:

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!], P\left(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_j\right) \neq 0$$

On en déduit que les nombres $P_{A_1}(A_2), P_{A_1 \cap A_2}(A_3), \dots, P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1})$ et $P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$ sont tous bien définis.
(2) Dans le cas particulier d'une intersection de 3 événements, l'égalité précédente se réécrit :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$$

Dans le cas particulier d'une intersection de 4 événements, elle se réécrit :

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C) \times P_{A \cap B \cap C}(D)$$

Etc.

2. Indépendance en probabilités

2.1. Indépendance de deux événements

Définition 2 (indépendance de deux événements)
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, ainsi que A et B deux événements de l'univers Ω.
On dit que $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ sont **indépendants** si, et seulement si, $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

Exemple 5
Soient A et B deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire tels que :

$$P(A) = 0{,}8\,;\; P(B) = 0{,}3 \text{ et } P(A \cup B) = 0{,}86$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Remarque 7
(1) L'indépendance n'est pas une notion ensembliste mais une notion probabiliste.

(2) Attention à ne pas confondre l'indépendance et l'incompatibilité de deux événements : l'incompatibilité de A et B permet d'obtenir l'égalité $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (et intervient donc dans le cas d'une réunion) tandis que l'indépendance de A et B permet d'obtenir l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (et intervient donc dans le cas d'une intersection).

Proposition 3
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, ainsi que A et B deux événements de l'univers Ω avec A de probabilité non nulle. On a l'équivalence suivante :

$$\boldsymbol{A} \textbf{ et } \boldsymbol{B} \textbf{ sont indépendants} \Leftrightarrow \boldsymbol{P(B) = P_A(B)}$$

Démonstration :

Remarque 8
(1) La proposition précédente montre que deux événements A et B sont indépendants (avec A de probabilité non nulle) si, et seulement si, la probabilité de B et la probabilité conditionnelle de B sachant A sont égales. On pourra donc retenir que A et B sont indépendants si, et seulement si, « la réalisation de l'événement A n'influe pas sur celle de B ».
(2) L'indépendance de deux événements peut se voir comme une réécriture de l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ qui devient $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

2.2. Indépendance mutuelle d'événements

Définition 3 (indépendance mutuelle)
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, n un entier supérieur ou égal à 2 et $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements de l'univers Ω.
On dit que les événements $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ sont **mutuellement indépendants** si, et seulement si, pour toute k-liste $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ (on a donc $1 \leq k \leq n$), on a :

$$\boldsymbol{P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \times P\left(A_{i_2}\right) \times \dots \times P\left(A_{i_k}\right)}$$

Exemple 6
(1) Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.
Les événements A, B et C sont mutuellement indépendants si, et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A \cap C) = P(A)P(C), P(B \cap C) = P(B)P(C)$$
$$\text{et } P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

(2) On considère un dé à six faces parfaitement équilibré et numéroté de 1 à 6. On le lance une première fois, puis une deuxième fois, en notant à chaque fois le chiffre obtenu. On considère alors les événements suivants :

A: « le premier chiffre obtenu est pair »
B: « le deuxième chiffre obtenu est pair »
C : « la somme des deux chiffres obtenus est paire »

(1) Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?
(2) Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Remarque 9
(1) Avec les notations de la définition précédente, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, on a en particulier :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

Égalité que l'on peut interpréter comme une réécriture de la formule des probabilités composées, puisque l'égalité :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

devient :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

(2) On se permet souvent de parler d' « indépendance » à la place d' « indépendance mutuelle » dans les exercices.
(3) Étant donnés les deux points précédents, on peut retenir que lorsqu'on est amené à déterminer la probabilité d'une intersection d'événements, il est pertinent de commencer par déterminer si les événements considérés sont (mutuellement) indépendants ou non : en cas d'indépendance on utilise l'égalité de la définition précédente, sinon on utilise la formule des probabilités composées (en cas de doute, on peut utiliser la formule des probabilités composées, qui est valable que l'on ait indépendance des événements considérés ou non).
(4) Il ne faut pas confondre « indépendance mutuelle » et indépendance « deux à deux » ! L'indépendance mutuelle implique de manière triviale l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse !
(5) L'indépendance est le plus souvent supposée acquise. Le cas le plus fréquent est celui d'expériences aléatoires successives, situation dans laquelle on peut, lorsque cela est adapté (cf. les exemples suivants), faire l'hypothèse de modélisation consistant à supposer que des événements définis relativement à des expériences aléatoires deux à deux distinctes sont mutuellement indépendants. On parle alors d'expériences aléatoires indépendantes et d'indépendance « naturelle ».

<u>Exemple 7</u>
(1) Un joueur lance 3 fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les événements « le joueur obtient un 6 au premier lancer », « le joueur obtient un nombre pair au deuxième lancer », « le joueur obtient un 1 au dernier lancer » sont mutuellement indépendants.
(2) D'autres expériences aléatoires successives indépendantes sont les suivantes : tirages successifs avec remise, lancers successifs d'une pièce, lancer d'une pièce puis d'un dé, etc.
(3) Reprendre l'exemple 4 précédent, mais cette fois avec des tirages avec remise.

<u>Théorème 4</u>
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, n un entier supérieur ou égal à 2 et $(A_1, \dots , A_n)$ une famille d'événements de l'univers Ω.
(1) Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il en va de même des événements $B_1, B_2, \dots, B_n$, où, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, B_k désigne A_k ou $\overline{A_k}$.
(2) Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors tout événement formé avec certains d'entre eux est indépendant de tout événement formé à partir d'autres.

<u>Exemple 8</u>
Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire mutuellement indépendants.
(1) On a alors (d'après le (1) du théorème précédent) :
$\bar{A}, B$ et C sont mutuellement indépendants ; $A, \bar{B}$ et C sont mutuellement indépendants ;
A, B et $\bar{C}$ sont mutuellement indépendants ; $\bar{A}, \bar{B}$ et C sont mutuellement indépendants ;
$\bar{A}, B$ et $\bar{C}$ sont mutuellement indépendants ; $A, \bar{B}$ et $\bar{C}$ sont mutuellement indépendants ;

$\bar{A}, \bar{B}$ et $\bar{C}$ sont mutuellement indépendants.
(2) Par exemple (d'après le (2) du théorème précédent), $\bar{A} \cup B$ et $\bar{C}$ sont indépendants, tout comme A et $\bar{B} \cap C$.

<u>Remarque 10</u>
Le (2) du théorème précédent s'appelle aussi parfois le « lemme des coalitions ».