Thème 13 - analyse- cours n°6 : applications, fonctions et bijectivité

1. Applications

1.1. Définitions

Définition 1
Soient E et F deux ensembles.
Une **application de E dans F** est un procédé qui à **tout élément x de E** associe un **unique élément de F** que l'on note $f(x)$.
L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ de l'application f, l'ensemble F s'appelle l'ensemble d'arrivée de l'application F.
L'élément $f(x)$ (de F) s'appelle **l'image** de x par f. On dit également que l'élément x (de E) est **un antécédent** de $f(x)$ par f.
On note :

$$\begin{aligned} f: E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble des applications de E dans F est souvent noté F^E.

Exemple 1
(1) On considère l'application f suivante de $E = \{1; 2; 3; 4\}$ dans $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$:

$$\begin{aligned} f: E &\to F \\ 1 &\mapsto 5 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 5 \\ 4 &\mapsto 7 \end{aligned}$$

On peut la représenter à l'aide d'un diagramme de Venn.
(2) Avec E un ensemble, l'application identité de E (dans $F = E$), noté Id_E, est un exemple important :

$$\begin{aligned} Id_E: E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(3) Voici une application g de $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x; y) &\mapsto x \times y \end{aligned}$$

(4) On lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré. On modélise cette expérience aléatoire par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, où P est la probabilité uniforme :

$$\begin{aligned} P: \mathcal{P}(\Omega) &\to [0; 1] \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

On rappelle que P est une application de $E = \mathcal{P}(\Omega)$ dans $F = [0; 1]$.
(5) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

Cette suite u est une application de $E = \mathbb{N}^*$ dans $F = \mathbb{R}$:

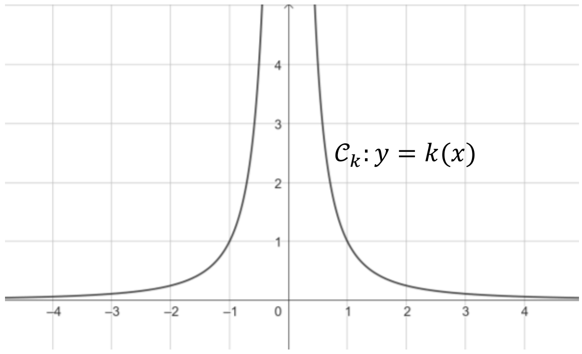
$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n = 1 + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

(6) Voici deux fonctions numériques h et k :

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

$$k: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

La fonction h n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puisque le réel 0 n'a pas d'image par cette fonction. En revanche, la fonction k est bien une application de $E = \mathbb{R}^*$ dans $F = \mathbb{R}$, puisque tout nombre réel non nul admet bien une image par k.
Comme on l'a vu dans un chapitre précédent, on peut la représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé :



Remarque 1
(1) Dans l'exemple précédent, f, Id_E, g, P, u et k sont bien des applications de E dans F, car, pour chacune d'elles, tout élément de E admet bien une unique image.
(1) Avec f une application de E dans F, tout élément de E admet par définition une unique image par f. Par contre, tout élément de F n'admet pas nécessairement d'antécédent par f. En outre, un élément de F peut admettre plusieurs antécédents par f.
(2) Une fonction numérique n'est pas nécessairement une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En revanche, une fonction numérique est une application de son ensemble de définition dans $\mathbb{R}$.

Définition 2
Deux applications f et g sont dites égales lorsque :
- elles ont le même ensemble de départ E ;
- elle sont le même ensemble d'arrivée F ;
- pour tout élément x de $E, f(x) = g(x)$.

1.2. Composition

Définition 3
Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F, ainsi que g une application de F dans G.
On appelle application **composée de $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{g}$**, ce que l'on note $\boldsymbol{g \circ f}$, l'application de E dans G qui à tout élément de E associe l'élément $\boldsymbol{g\big(f(x)\big)}$ de G, c'est-à-dire :
$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Exemple 2
(1) Reprenons l'application f de l'exemple 1 et considérons l'application m de $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ dans $G = \{0; 1\}$ et définie par :
$$m: x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'application $m \circ f$ est alors l'application nulle sur E.
(2) Soient les applications :

$$v: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad w: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x - 3$$

L'application $w \circ v$ est alors définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(w \circ v)(x) = w\big(v(x)\big) = v(x) - 3 = x^2 - 2$$

Tandis que l'application $v \circ w$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(v \circ w)(x) = v\big(w(x)\big) = \big(w(x)\big)^2 + 1 = (x - 3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$$

Remarque 2
(1) De manière générale, avec E un ensemble ainsi que f et g deux applications de E dans E (de sorte que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ aient les mêmes ensembles de départ et d'arrivée), on a :

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Autrement dit, la composition d'applications dans E^E n'est pas commutative.
(2) De manière générale, avec f une application de E dans F, on a :

$$f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$$

Proposition 1
Soient E, F, G et H quatre ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H.
La composition d'applications est associative, c'est-à-dire :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$$

1.3. Application bijective

Définition 4
Soient E et F deux ensembles, ainsi que f une application de E dans F.
On dit que f est **bijective de E dans F**, ou qu'elle réalise une **bijection de E sur F**, lorsque **tout élément** de l'ensemble d'arrivée F admet un **unique antécédent** par f dans E.

Remarque 3
(1) On dit que f est **injective de E sur F**, ou qu'elle réalise une **injection de E sur F**, lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent par f (c'est-à-dire un unique antécédent ou pas d'antécédent).
(2) On dit que f est **surjective de E sur F**, ou qu'elle réalise une **surjection de E sur F**, lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent par f.
(3) Ainsi, une application de E dans F est une **bijection de E sur F** lorsqu'elle est **à la fois injective et surjective de E sur F**.

Exemple 3
(1) La fonction f de l'exemple 1 n'est pas bijective de $E = \{1; 2; 3; 4\}$ sur $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
En effet, par exemple, l'élément 5 de F admet deux antécédents par f dans E qui sont 1 et 3 (f n'est donc pas injective de E sur F). En outre, l'élément 2 de F n'admet aucun antécédent par f dans E (f n'est donc pas surjective de E sur F).
(2) L'application Id_E est de manière évidente bijective de E sur E.

(3) L'application g de l'exemple 1 n'est pas bijective de $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}$, puisque, par exemple, l'élément 2 de F admet plusieurs antécédents par g dans E :

$$g\big((2;1)\big) = g\big((1;2)\big) = g\left(\left(\tfrac{1}{2};4\right)\right) = 2$$

(g n'est donc pas injective de E sur F.)

(4) L'application P de l'exemple 1 n'est pas bijective de $E = \mathcal{P}(\Omega)$ dans $F = [0;1]$, car, par exemple, en considérant l'événement A: « obtenir un chiffre pair », on a :

$$P(A) = P(\bar{A}) = \tfrac{1}{2}$$

Ainsi, l'élément $\frac{1}{2}$ de F admet au moins deux antécédents par P dans E (donc P n'est pas injective de E dans F).

(5) L'application u de l'exemple 1 n'est pas bijective de $E = \mathbb{N}^*$ dans $F = \mathbb{R}$, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \tfrac{1}{n^2} > 1, \text{ car } \tfrac{1}{n^2} > 0 \text{ (puisque } n^2 > 0\text{)}$$

Ainsi, par exemple, l'élément -1 de F n'admet aucun antécédent dans E par u (donc u n'est pas surjective de E sur F).

(6) L'application k de l'exemple 1 n'est pas bijective de $E = \mathbb{R}^*$ dans $F = \mathbb{R}$, puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, k(x) = \tfrac{1}{x^2} > 0, \text{ car } x^2 > 0 \text{ (puisque } x \neq 0\text{)}$$

Ainsi, par exemple, l'élément -2 de F n'admet aucun antécédent dans E par k (donc k n'est pas surjective de E sur F).

Par contre, considérons l'application φ de $E = \mathbb{R}^{*+}$ dans $F = E = \mathbb{R}^{*+}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \varphi(x) = \tfrac{1}{x^2}$$

Alors φ est bijective de E dans E. En effet, avec x et y deux éléments de $\mathbb{R}^{*+}$, on a :

$$y = \tfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \tfrac{1}{y} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{y}} = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{y}} = |x| \Leftrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{y}} = x \text{ (puisque } x > 0\text{)}$$

Ainsi, tout élément y de $F = \mathbb{R}^{*+}$ admet un unique antécédent $x = \sqrt{\frac{1}{y}}$ par φ dans $\mathbb{R}^{*+}$.

Remarque 4

De manière générale, une application f de E dans F est bijective lorsque, avec y un élément fixé de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une unique solution dans E.

Théorème 1

Soit f une application **bijective** de E dans F.

Il existe une unique application g de F dans E telle que, pour tout élément x de E et tout élément y de F :

$$\boldsymbol{y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x}$$

Définition 5

Avec les notations du théorème 1 précédent, la fonction g est appelée **bijection réciproque de f** et se note $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Exemple 4

La bijection réciproque de la fonction φ de l'exemple 3 précédent est l'application φ^{-1} de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$ définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{*+}, \varphi^{-1}(y) = \sqrt{\tfrac{1}{y}}$$

Proposition 2
Soient E et F deux ensembles **finis**.
Si il existe une bijection de E sur F, alors $card(E) = card(F)$.

Exemple 4
On considère l'application $p: [\![1; 10]\!] \to \{-1; 1\}$
$$n \mapsto \begin{cases} -1 \text{ si n est pair} \\ 1 \text{ si n est impair} \end{cases}$$
L'application n'est pas bijective de $[\![1\,;10]\!]$ sur $\{-1\,;1\}$, car si elle l'était, ces deux ensembles finis seraient de même cardinal, ce qui n'est pas le cas (puisque $card([\![1\,;10]\!]) = 10$ et $card(\{-1\,;1\}) = 2$.

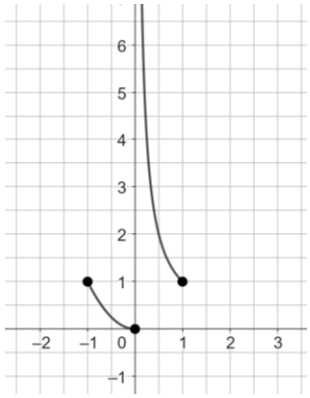
2. Cas des fonctions continues, théorème de la bijection

Définition 6
On appelle **segment de** $\mathbb{R}$ tout **intervalle** de nombres réels **fermé et borné**, c'est-à-dire tout intervalle de la forme $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, où $(a; b)$ est un couple de nombres réels avec $a < b$.

Théorème 2 (dit « **des bornes** »)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et **continue** sur le **segment** $[a; b]$.
La fonction f est alors **bornée** sur le segment $[a; b]$ et **atteint ses bornes**, c'est-à-dire qu'il existe un couple $(c; d)$ de réels de $[a; b]$ tel que :
$$\boldsymbol{\forall x \in [a; b], f(c) \leq f(x) \leq f(d)}$$
Le réel $f(c)$ est alors le minimum (atteint en c) et le réel $f(d)$ le maximum (atteint en d) de f sur $[a; b]$.

Exemple 5
La fonction $p: x \mapsto x(1-x)$ est continue sur le segment $I = [0; 1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle. Une étude des variations de la fonction p sur I (laissée au lecteur) montre qu'elle admet, sur cet intervalle, le minimum de 0 atteint en 0 et 1, ainsi que le maximum de $\frac{1}{4}$ atteint en $\frac{1}{2}$. On a ainsi :
$$\forall x \in [0; 1], f(0) = f(1) \leq f(x) \leq f(\tfrac{1}{2}), \text{ avec } f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

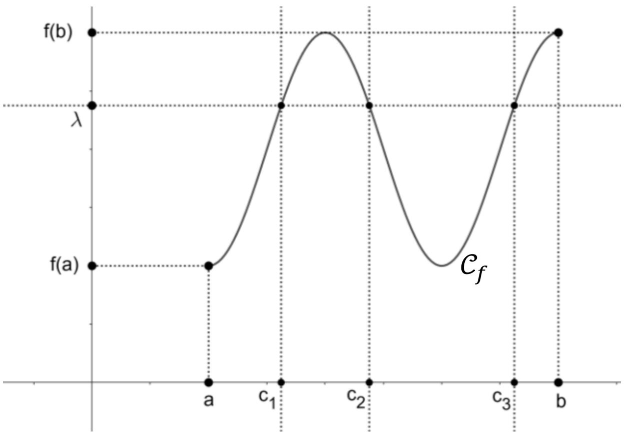
Remarque 4
Dans le théorème précédent :
(1) L'hypothèse de continuité de f est essentielle ! En effet, par exemple, la fonction f définie ci-dessous est définie, mais pas continue, sur l'intervalle $[-1; 1]$:
$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in [-1; 0] \\ \frac{1}{x} \text{ si } x \in]0; 1] \end{cases}$$
De fait, elle n'est pas bornée sur l'intervalle $[-1; 1]$, car non majorée sur cet intervalle, puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. Voici sa courbe représentative :

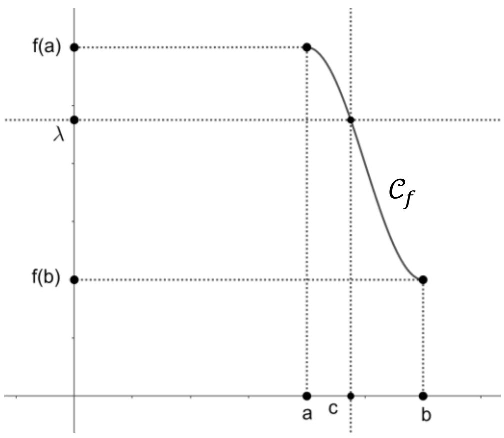


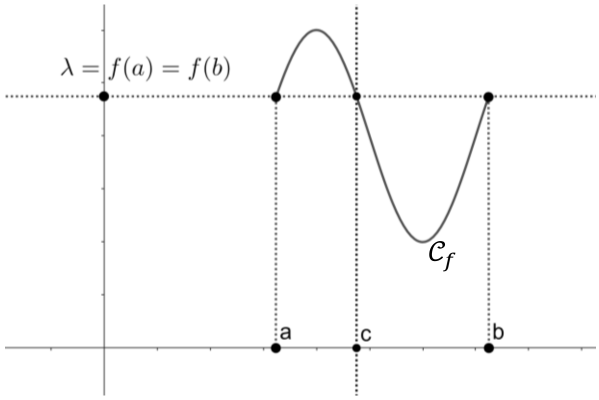
(2) Le fait que l'intervalle sur lequel f est continue doit être fermé et borné est essentiel !
Par exemple, la fonction inverse f est continue sur l'intervalle $]0;1]$, mais n'est pas bornée sur cet intervalle (en effet, elle n'est pas majorée sur cet intervalle puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$). De même, par exemple, cette même fonction inverse est continue et bornée sur l'intervalle $[1;+\infty[$, car pour tout réel x de cet intervalle, $0 < f(x) \leq 1$. Par contre, elle n'atteint pas la valeur 0 qui est une valeur limite (en effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$).

<u>Théorème 3</u> (dit « **des valeurs intermédiaires** »)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et **continue** sur le **segment** $[a;b]$.
On a alors le résultat suivant :
Pour tout réel λ appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c appartenant à l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = \lambda$.
Autrement dit, l'équation (E): $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a;b]$.

<u>Illustration du théorème 3 :</u>







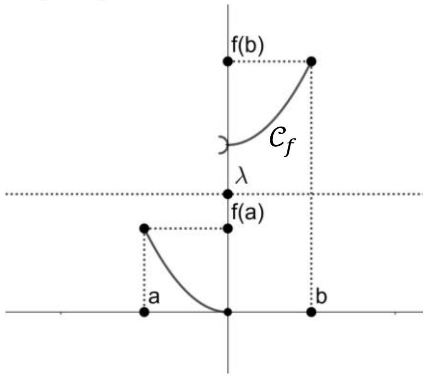
Remarque 5

Avec les notations du théorème précédent :

(1) Le réel λ peut admettre plusieurs antécédents dans $[a; b]$ par f, autrement dit l'équation (E) peut admettre plusieurs solutions.

(2) On peut avoir $f(a) < f(b), f(a) > f(b)$ ou même $f(a) = f(b)$!

(3) L'hypothèse de continuité de f est essentielle, comme le prouve l'exemple ci-dessous, dans lequel f est définie - mais pas continue - sur $[a; b]$:



On constate que le réel λ n'admet alors aucun antécédent par f dans l'intervalle $[a; b]$. Pourtant ce réel λ appartient bien à l'intervalle $[f(a); f(b)]$.

(4) Comme on va le voir dans l'exemple ci-après, on utilise souvent le théorème des valeurs intermédiaires dans le cadre décrit dans le corollaire suivant :

Corollaire 1 (du théorème des valeurs intermédiaires)

Toute fonction **continue** et qui change de signe sur un intervalle I s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

Exemple 6

Montrer que l'équation $(E): 2x^3 + 3x^2 - 2 = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2; 1]$.

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. L'ensemble des images par f des éléments de I est appelé **image de I par f**, et se note $\boldsymbol{f(I)}$. C'est-à-dire :

$$f(I) = \{f(x) |\ x \in I\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I, y = f(x)\}$$

Exemple 7

(1) Donner l'image de l'intervalle $[1; 4]$ par les fonctions inverses, racine carrée et partie entière.

(2) Donner l'image de $\mathbb{R}$ par les fonctions carré, cube et partie entière.

Théorème 4
(1) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
(2) En particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarque 6
L'exemple précédent illustre bien le théorème ci-dessus.

Théorème 5 (dit « **de la bijection** »)
Soient I un intervalle ainsi qu'une fonction f définie, **continue** et **strictement monotone** sur cet intervalle. On a alors les résultats suivants :
(1) f réalise une **bijection** de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
(2) La bijection réciproque f^{-1} de f réalise une bijection de J sur $f^{-1}(J) = I$ continue, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.
(3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $(d): y = x$ (appelée première bissectrice du plan).

Illustration du théorème 5 : la 2ème figure illustrant le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 3) présente pour λ un unique antécédent c par f puisque, en plus d'être continue sur l'intervalle $[a; b]$, la fonction f y est également strictement décroissante.

Remarque 7
Avec les notations du théorème précédent :
(1) Par définition d'une application bijective, le (1) assure que tout réel λ de l'intervalle J admet un unique antécédent c par f dans l'intervalle I.
Autrement dit, pour tout réel λ de l'intervalle J, l'équation $(E): f(x) = \lambda$ admet une unique solution c dans l'intervalle I.
(2) La continuité de f assure l'**existence** d'un antécédent pour λ, sa stricte monotonie, elle, assure l'**unicité** de cet antécédent.

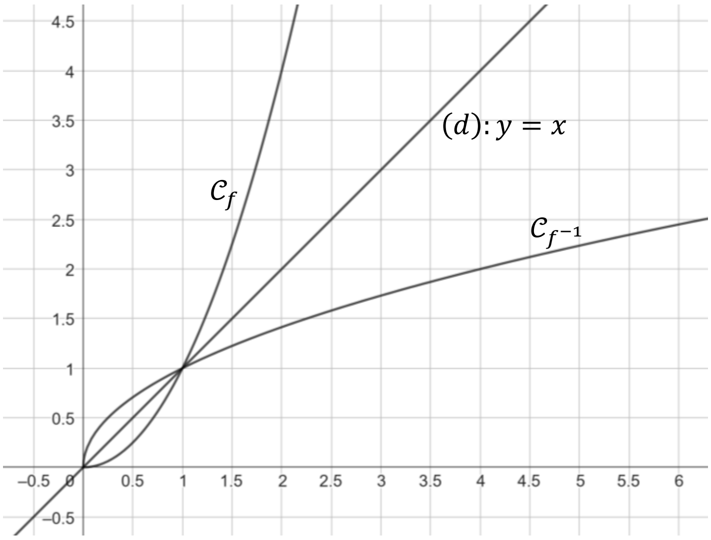
Exemple 8
(1) Déterminer le nombre exacte de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) de l'exemple 6.
(2) La fonction carré f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0\,; +\infty[$ et $f(I) = I$ (résultat de cours).
Ainsi, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I) = I$, sa bijection réciproque f^{-1} réalise une bijection de $f(I) = I$ sur I et est également continue et strictement croissante sur I.
Ce théorème assure également que les courbes représentatives, dans un repère orthonormé, de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Enfin, avec x et y deux réels de l'intervalle $[0; +\infty[$, par définition de la fonction racine carrée g, on a :

$$y = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x$$

C'est-à-dire :

$$y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

On en déduit donc (cf. théorème 1) que la fonction f^{-1}, bijection réciproque de la fonction carré f, n'est autre que la fonction racine carrée g !



(3) La fonction inverse f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ et $f(I) = I$ (résultat de cours).
Ainsi, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I) = I$, sa bijection réciproque f^{-1} réalise une bijection de $f(I) = I$ sur I et est également continue et strictement décroissante sur I.
Ce théorème assure également que les courbes représentatives, dans un repère orthonormé, de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Enfin, avec x et y deux réels de l'intervalle $]0; +\infty[$, par définition de la fonction inverse, on a :

$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = x$$

C'est-à-dire :

$$y = f(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

On en déduit donc (cf. théorème 1) que la fonction f^{-1}, bijection réciproque de la fonction inverse f, n'est autre que la fonction inverse f elle-même !