Thème 14 - analyse- cours n°7 : fonctions logarithme, exponentielle et puissances

1. La fonction logarithme népérien

Théorème 1 (admis)
Il existe une **unique** fonction numérique **définie et dérivable sur** $\mathbb{R}^{*+}$, de **fonction dérivée la fonction inverse** et **prenant la valeur 0 en** $\mathbf{1}$.

Définition 1
La fonction décrite dans le théorème 1 précédent est appelée fonction **logarithme népérien**. Elle est notée $\mathbf{ln}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{ln} :]\mathbf{0}; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{ln}(\mathbf{1}) = \mathbf{0} \\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{*+}, \mathbf{ln}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

Remarque 1
(1) On a aussi $\ln(\mathrm{e}) = 1$, où e est appelé le nombre de Neper (mathématicien écossais, fin 16ème siècle). On a en outre (valeur approchée à connaître) $\mathrm{e} \approx 2{,}72$ à 10^{-2} près.
(2) On peut parfois trouver l'abus de notation « $\ln x$ » plutôt que « $\ln(x)$ ».

Proposition 1 (propriétés algébriques de la fonction $\ln$)
Soient a et b deux réels strictement positifs. On a:
(1) $\mathbf{ln}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{b})$;
(2) $\mathbf{ln}(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}) = -\mathbf{ln}(\boldsymbol{b})$;
(3) $\mathbf{ln}(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) - \mathbf{ln}(\boldsymbol{b})$;
(4) **Pour tout entier relatif** $\boldsymbol{n}$, $\mathbf{ln}(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n} \times \mathbf{ln}(\boldsymbol{a})$;
(5) $\mathbf{ln}(\sqrt{\boldsymbol{a}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}$.

Proposition 2
(1) La fonction logarithme népérien est **strictement croissante sur** $]\mathbf{0}\,; +\infty[$. On a donc:

$$\forall(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \in (\mathbb{R}^{*+})^2, \mathbf{ln}\, \boldsymbol{a} < \mathbf{ln}\, \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$$

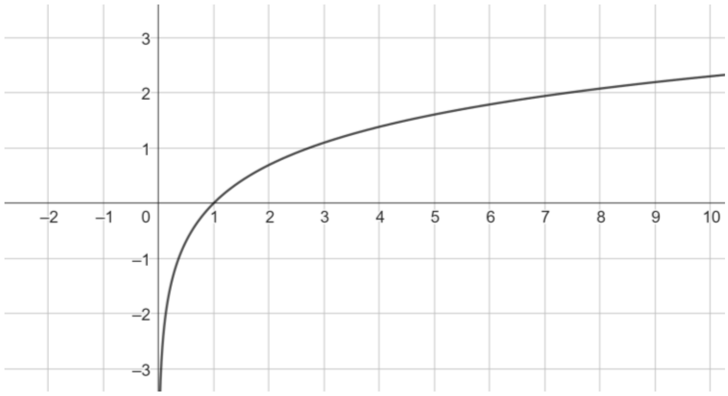
(2) $\forall(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$, $\mathbf{ln}\, \boldsymbol{a} = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ (la fonction $\ln$ est injective de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$) ;
(3) La fonction $\ln$ est **strictement négative sur** $]\mathbf{0}; \mathbf{1}[$, **strictement positive sur** $]\mathbf{1}; +\infty[$ et s'annule (une seule fois) en 1 ;
(4) La fonction $\mathbf{ln}$ **est concave sur** $\mathbb{R}^{*+}$;
(5) Sur $\mathbb{R}^{*+}$, la fonction $\ln$ n'est **ni minorée ni majorée** ;
(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) = -\infty$;
(7) La fonction $\mathbf{ln}$ **est continue sur** $\mathbb{R}^{*+}$;

(8) La fonction $\ln$ **réalise une bijection de** $\mathbb{R}^{*+}$ **sur** $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists!\, x \in \mathbb{R}^{*+}, y = \ln x$$

Remarque 2

Voici la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormé du plan :



Proposition 3 (une limite à connaître)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$ (ce qui lève l'indétermination du type "0/0")

Théorème 2

(1) Soit u une fonction **strictement positive** et **dérivable** sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln\circ\, u$ (définie pour tout réel x de I par $(\ln\circ\, u)(x) = \ln\big(u(x)\big)$) est dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, (\ln\circ\, u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

(2) Soit u une fonction **dérivable** et **ne s'annulant pas** sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln\circ\, |u|$ (définie pour tout réel x de I par $(\ln\circ\, |u|)(x) = \ln(|u(x)|)$) est dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in I, (\ln\circ\, |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

2. La fonction exponentielle

Définition 2

La fonction **exponentielle**, noté **exp**, est définie comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On a alors :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to]0; +\infty[\\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

Telle que :

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

Remarque 3

(1) Puisque $\ln(1) = 0$, alors $\exp(0) = 1$. Et puisque $\ln(\mathrm{e}) = 1$, alors $\exp(1) = \mathrm{e}$.

(2) La définition précédente a pour conséquence immédiate :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^{*+}, \exp(\ln(y)) = y$$

Proposition 4 (propriétés algébriques de la fonction exponentielle)
(1) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$ **et** $\mathbf{exp}(-\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{exp}(\boldsymbol{x})}$;
(2) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}, \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{exp}\,(\boldsymbol{y})$;
(3) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}, \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{\mathbf{exp(x)}}{\mathbf{exp}(\boldsymbol{y})}$;
(4) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}, \mathbf{exp}(\boldsymbol{nx}) = (\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{n}}$;
(5) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \sqrt{\mathbf{exp}(\boldsymbol{x})} = \mathbf{exp}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)$.

Remarque 4
(1) Le (4) de la propriété précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^{\mathrm{n}} = \mathrm{e}^{n}$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exp(n) = \mathrm{e}^{n}$$

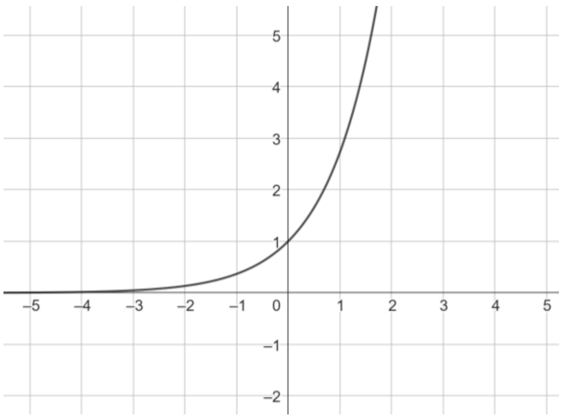
On prolonge alors ce fait algébrique à tous les nombres réels, ce qui donne une nouvelle notation pour la fonction exponentielle :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}$$

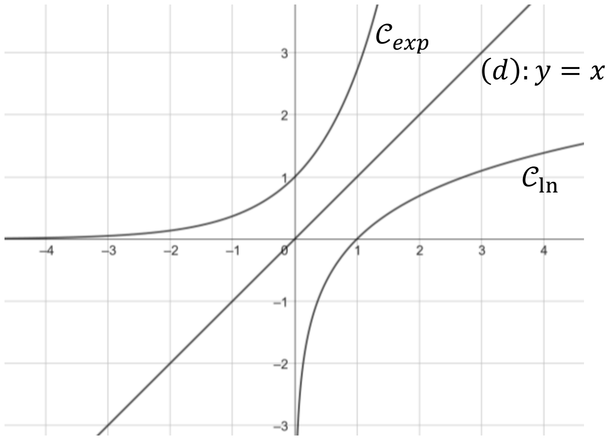
(Ce qu'il faut lire « exponentielle de x égal à e puissance x ».)
On peut alors réécrire (et retenir plus facilement, puisque l'on connaît les règles sur les puissances) la proposition 4 :

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}$ **et** $\mathbf{e}^{-\boldsymbol{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}}$;
(ii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{e}^{\boldsymbol{y}}$;
(iii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}, \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}} = \frac{\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}}{\mathbf{e}^{\boldsymbol{y}}}$;
(iv) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}, \mathbf{e}^{\boldsymbol{nx}} = (\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{n}}$;
(v) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \sqrt{\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}} = \mathbf{e}^{\frac{\boldsymbol{x}}{2}}$.

(2) Voici la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé :



Les courbes des fonction $\ln$ et exp sont alors symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = x$, ce qui est le cas, rappelons-le, pour toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre :



Proposition 5
(1) La fonction exponentielle est **strictement positive sur** $\mathbb{R}$;
(2) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{exp}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x})$$

(2) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} < \mathbf{e}^{\boldsymbol{y}}$$

(3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (la fonction exponentielle est injective sur $\mathbb{R}$) ;
(4) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} < \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < \mathbf{0}, \mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} > \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ **et** $\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ **;**
(5) La fonction exponentielle est **convexe sur** $\mathbb{R}$;
(6) Sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est **minorée par** $\mathbf{0}$, mais n'est **pas majorée** ;
(7) $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to +\infty} \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to -\infty} \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ **;**
(8) La fonction **exponentielle est continue sur** $\mathbb{R}$;
(9) La fonction **exponentielle réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **sur** $]\mathbf{0}; +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\forall y \in]0; +\infty[, \exists!\, x \in \mathbb{R}, y = e^x$$

Proposition 6 (une limite à connaître)

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1}$$ (ce qui lève l'indétermination du type "0/0")

Théorème 3
Soit u une fonction **dérivable** sur un intervalle I. Alors la fonction $\exp \circ\, u$ (définie pour tout réel x de I par $(\exp \circ\, u)(x) = \exp\big(u(x)\big) = \mathrm{e}^{u(x)}$) est dérivable sur I, avec :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, (\mathbf{exp} \circ \boldsymbol{u})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$$

3. Les fonctions « puissances »

Définition 3
Soit α un réel. On pose, **pour tout réel strictement positif** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha} \ln(\boldsymbol{x})}$.
La fonction numérique f_α définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ est appelée **fonction puissance**.

Remarque 5
(1) Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$. Comme vu dans la proposition 1, pour tout entier relatif n, on a :

$$\ln(x^n) = n\ln(x)$$

Ainsi, les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre :

$$x^n = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = \mathrm{e}^{n\ln(x)}$$

La définition précédente est donc cohérente avec la définition de x^n, elle prolonge cette notion en donnant du sens à x^α, où α n'est plus nécessairement un nombre entier.

(2) Attention, le nombre x^n a du sens :

- pour tout réel x lorsque $n \in \mathbb{N}$;
- pour tout réel non nul x lorsque $n \in \mathbb{Z}^{*-}$.

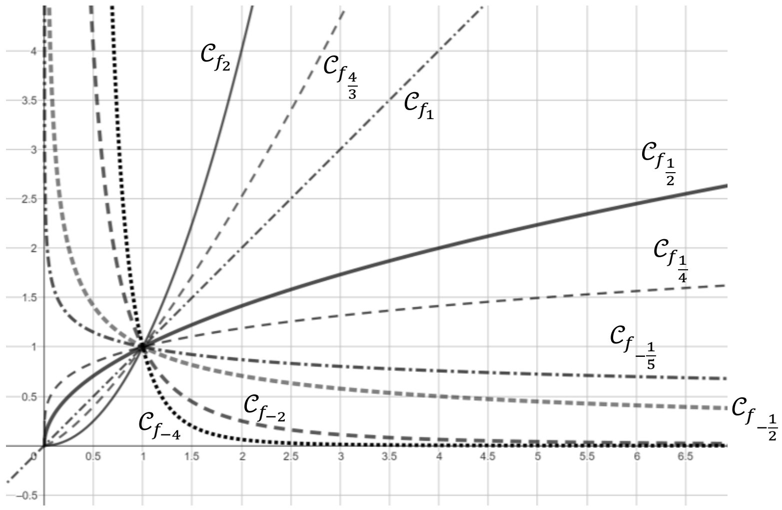
Par contre, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, x^α n'a de sens qu'avec x un réel strictement positif !

(3) Avec les notations de la définition précédente, la fonction f_0 est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^{*+}$, tandis que la fonction f_1 est la fonction identité sur $\mathbb{R}^{*+}$(c'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f_1(x) = x$). En outre, la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ coïncide avec la fonction racine carrée sur $]0; +\infty[$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f_{\frac{1}{2}}(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}$$

(La deuxième égalité ayant été vue dans la proposition 1.)

(4) Voici les courbes représentatives de quelques-unes de ces fonctions dans un repère orthonormé :



<u>Proposition 7</u> (propriétés algébriques des fonctions puissances)

Soient $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x; y) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$.

(1) $\boldsymbol{x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}}$;

(2) $\boldsymbol{x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}}$;

(3) $\boldsymbol{\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}}$;

(4) $\boldsymbol{(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha}$;

(5) $\boldsymbol{\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}}$;

(6) $\boldsymbol{(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}}$.

<u>Remarque 6</u>

Les résultats de la proposition précédente ne sont pas durs à retenir, puisque ce sont les mêmes que ceux connus depuis longtemps avec des puissances entières !

Proposition 8

Soient α un nombre réel non nul et f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

(1) La fonction $\boldsymbol{f_\alpha}$ **est continue sur** $\mathbb{R}^{*+}$;

(2) La fonction $\boldsymbol{f_\alpha}$ **est strictement positive sur** $\mathbb{R}^{*+}$;

(3) Lorsque $\boldsymbol{\alpha > 0}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_\alpha(x) = 0}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty}$;

Lorsque $\boldsymbol{\alpha < 0}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_\alpha(x) = +\infty}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0}$;

(4) La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, avec :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$$

(5) Lorsque $\boldsymbol{\alpha > 0}$, la fonction $\boldsymbol{f_\alpha}$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}^{*+}$;

Lorsque $\boldsymbol{\alpha < 0}$, la fonction $\boldsymbol{f_\alpha}$ **est strictement décroissante sur** $\mathbb{R}^{*+}$;

(6) La fonction $\boldsymbol{f_\alpha}$ **réalise une bijection de** $\mathbb{R}^{*+}$ **sur** $\mathbb{R}^{*+}$;

(7) Sur $\mathbb{R}^{*+}$, la fonction $\boldsymbol{f_\alpha}$ **est convexe si** $\boldsymbol{\alpha < 0}$ **ou si** $\boldsymbol{\alpha \geq 1}$, elle est **concave si** $\boldsymbol{0 < \alpha \leq 1}$.

Théorème 4

Soit u une fonction **strictement positive** et **dérivable** sur un intervalle I. Alors la fonction u^α (définie pour tout réel x de I par $(u^\alpha)(x) = \big(u(x)\big)^\alpha$ est dérivable sur I, avec :

$$\boldsymbol{\forall x \in I, (u^\alpha)'(x) = \alpha u'(x)\big(u(x)\big)^{\alpha-1}}$$

Remarque 7

Les résultats des propositon 8 et théorème 4 précédents sont plus à savoir retrouver dans des exemples concrets qu'à connaître par cœur : il suffit de remarquer, avec les notations précédentes, que $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$ et $\big(u(x)\big)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(u(x))}$, puis d'appliquer les connaissances acquises sur les fonctions $\ln$ et $\exp$.

4. croissances comparées

Théorème 5 (croissances comparées)

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (ce qui lève l'indétermination du type "∞/∞") ;

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0^-$ (ce qui lève l'indétermination du type "$0 \times \infty$") ;

Plus généralement, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n\ln(x) = 0^-$;

Plus généralement encore, pour tout réel α de $\mathbb{R}^{*+}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha\ln(x) = 0^-$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (ce qui lève l'indétermination du type "∞/∞") ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (ce qui lève l'indétermination du type "$0 \times \infty$") ;

Plus généralement, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$;

Plus généralement encore, pour tout réel α de $\mathbb{R}^{*+}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha\mathrm{e}^x = 0$.