Thème 15 - Analyse - cours n°8 : retour sur les suites numériques, convergence et théorème de la limite monotone

1. Limite d'une suite

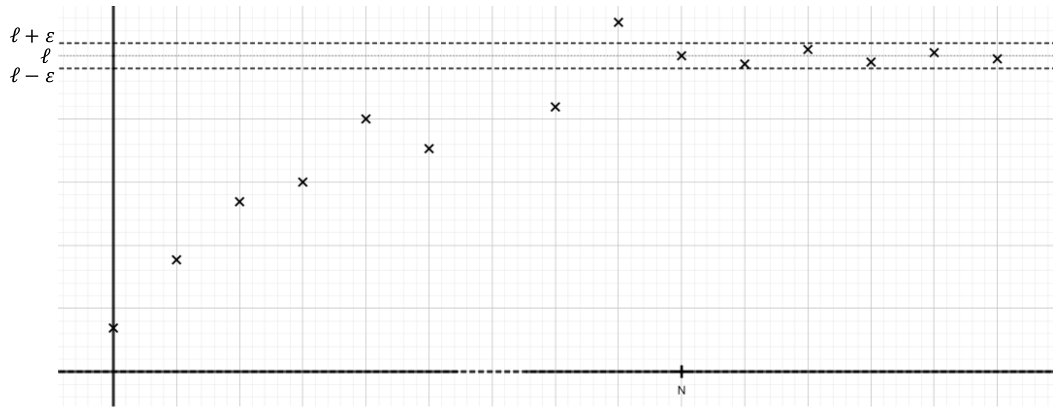
1.1. Suites convergentes, suites divergentes

Définition 1
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite numérique.
(1) On dit que (u_n) converge vers ℓ, ce que l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (ou $\lim(u_n) = \ell$), lorsque les nombres u_n sont aussi « proches » que l'on veut de ℓ dès que n est suffisamment « grand ».
(2) On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim(u_n) = +\infty$), lorsque les nombres u_n sont aussi « grands » que l'on veut dès que n est suffisamment « grand ».
(3) On dit que (u_n) diverge vers $-\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ou $\lim(u_n) = -\infty$), lorsque les nombres u_n sont strictement négatifs et aussi « grands » que l'on veut en valeur absolue dès que n est suffisamment « grand ».

Remarque 1
Voici des définitions plus rigoureuses (avec les notations de la définition précédente) :
(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, lorsque, pour tout réel strictement positif ε (même arbitrairement proche de 0), il existe un entier naturel N, tel que :

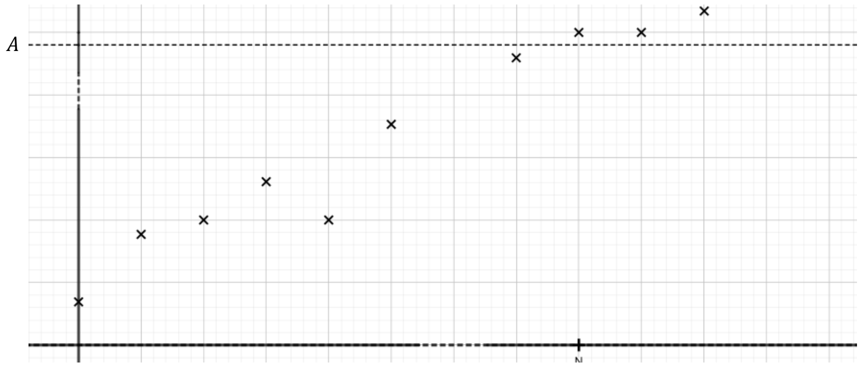
$$\forall n \in [\![N\,;+\infty[\![,\ u_n \in]\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon[\quad \text{(c'est-à-dire } \ell-\varepsilon < u_n < \ell+\varepsilon\text{)}$$

Illustration :



(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, lorsque, pour tout réel A (même arbitrairement « grand »), il existe un entier naturel N, tel que :

$$\forall n \in [\![N\,;+\infty[\![,\ u_n \in]A; +\infty[\quad \text{(c'est-à-dire } A < u_n\text{)}$$



(3) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, lorsque, pour tout réel A (même strictement négatif avec $|A|$ arbitrairement « grande »), il existe un entier naturel N, tel que :

$$\forall n \in [\![N\,;+\infty[\![,\ u_n \in]-\infty; A[\ \text{ (c'est-à-dire } u_n < A)$$

(Illustration laissée au lecteur.)

(4) On a l'équivalence suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$$

En effet, les propriétés algébriques de la valeur absolue donnent :

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

<u>Proposition 1</u> (limites usuelles)

(1) (Suites usuelles divergeant vers $+\infty$)

- Pour tout entier naturel k non nul, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$;
- plus généralement, pour tout réel α strictement positif, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$;
- pour tout réel q de l'intervalle $]1; +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

(2) (Suites usuelles convergeant vers 0)

- Pour tout entier naturel k non nul, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;
- plus généralement, pour tout réel α strictement positif, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$;
- pour tout réel q de l'intervalle $]-1; 1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

<u>Définition 2</u>

Soit (u_n) une suite numérique.

(1) On dit que la suite (u_n) est convergente lorsqu'il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

(2) On dit que la suite (u_n) est divergente lorsqu'elle ne converge pas.

<u>Remarque 2</u>

Une suite divergente ne diverge pas nécessairement vers $-\infty$ ou $+\infty$. Une suite divergente peut en effet ne pas admettre de limite, comme par exemple la suite (u_n) définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$.

De manière générale, pour tout réel q de l'intervalle $]-\infty; -1]$, la suite (u_n) définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = q^n$ n'a pas de limite.

En résumé, pour une suite divergente, il y a trois cas possibles : elle diverge vers $+\infty$, elle diverge vers $-\infty$ ou elle n'admet pas de limite.

Théorème 1
Lorsque la limite d'une suite existe (égale à un réel ℓ, $-\infty$ ou $+\infty$), elle est unique.

Remarque 3
Le théorème précédent signifie qu'une suite (u_n) ne peut pas converger vers deux réels distincts ℓ_1 et ℓ_2 à la fois, qu'elle ne peut pas diverger vers $+\infty$ et converger vers un réel ℓ à la fois, qu'elle ne peut pas diverger vers $-\infty$ et converger vers un réel ℓ à la fois, ou qu'elle ne peut pas diverger vers $-\infty$ et diverger vers $+\infty$ à la fois.

1.2. Opérations sur les limites

Remarque 4
Le lecteur relira le cours sur les opérations sur les limites avec les fonctions. Il appliquera les mêmes résultats aux suites (en notant que pour une suite, la variable n tend nécessairement vers $+\infty$).
On retrouve d'ailleurs les mêmes formes indéterminées du type « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Exemple 1
Déterminer les limites des suites définies ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 - n + 5$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 4n^3 + 2{,}4^n + \sqrt{n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \frac{-n+4}{n^4+n+5}$$

1.3. Convergence et ordre

Théorème 2 (passage à la limite dans les inégalités)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers les deux réels ℓ_1 et ℓ_2 respectivement, ainsi qu'un entier naturel q.
On suppose que :

$$\forall n \in [\![q\,;+\infty[\![, u_n \leq v_n$$

On a alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Remarque 5
Toute inégalité stricte est a fortiori large (la réciproque est fausse !), ainsi le résultat de la propriété précédente reste vrai en supposant (avec les mêmes notations) :

$$\forall n \in [\![q\,;+\infty[\![, u_n < v_n$$

Exemple 2
Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et telle que :

$$\forall n \in [\![4\,;+\infty[\![, 2 \leq u_n < 3$$

On a alors, en passant à la limite, $2 \leq \ell \leq 3$.

1.4. Théorèmes de comparaison

Théorème 3
Soit $q \in \mathbb{N}$ et soient deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que, pour tout $n \in [\![q\,;+\infty[\![$, $u_n \leq v_n$.
(1) Si $\lim(u_n) = +\infty$, alors $\lim(v_n) = +\infty$ (théorème de comparaison par minoration).
(2) Si $\lim(v_n) = -\infty$, alors $\lim(u_n) = -\infty$ (théorème de comparaison par majoration).

Exemple 3
On rappelle que (cela a été démontré dans un cours précédent) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq x + 1$$
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n$.

Théorème 4 (de l'encadrement ou « des gendarmes »)
Soient $q \in \mathbb{N}$ et trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) telles que :
$$\forall n \in [\![q\,;+\infty[\![, u_n \leq v_n \leq w_n$$
Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors il en va de même de la suite (v_n), c'est-à-dire :
$$\lim(v_n) = \ell$$

Exemple 4
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Corollaire 1
Soient $q \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{R}$ et deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que :
$$\forall n \in [\![q\,;+\infty[\![, |u_n - \ell| \leq v_n$$
Si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ.

2. Théorème de la limite monotone

2.1. Suites bornées, signe d'une suite

Définition 3
Soient p un entier naturel fixé et une suite réelle $(u_n)_{n \geq p}$.
(1) On dit que $(u_n)_{n \geq p}$ est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que :
$$\forall n \in [\![p\,;+\infty[\![, m \leq u_n$$
Ce réel m est alors appelé un minorant de la suite u.
(2) On dit que $(u_n)_{n \geq p}$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que :
$$\forall n \in [\![p\,;+\infty[\![, u_n \leq M$$
Ce réel M est alors appelé un majorant de la suite u.
(3) On dit que la suite u est bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple 5

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Démontrer que cette suite est bornée.

Remarque 6

(1) Attention, ces majorant et minorant sont bien sûr indépendants de n !

(2) Si une suite est majorée (respectivement minorée), alors elle admet une infinité de majorants (respectivement de minorants) !

Proposition 2

Soient p un entier naturel fixé et une suite réelle $(u_n)_{n\geq p}$.

La suite $(u_n)_{n\geq p}$ est bornée si, et seulement si, il existe un réel positif K tel que $|u_n| \leq K$ (c'est-à-dire tel que $-K \leq u_n \leq K$).

Définition 4

Soit (u_n) une suite réelle et $q \in \mathbb{N}$.

(1) On dit que (u_n) est positive ou nulle (respectivement strictement positive) à partir du rang q, lorsque :

$$\forall n \in [\![q\,;+\infty[\![, u_n \geq 0 \text{ (respectivement } u_n > 0)$$

(2) On dit que (u_n) est négative ou nulle (respectivement strictement négative) à partir du rang q, lorsque :

$$\forall n \in [\![q\,;+\infty[\![, u_n \leq 0 \text{ (respectivement } u_n < 0)$$

Remarque 7

Une suite n'est pas nécessairement de signe constant à partir de son terme initial, d'où l'introduction du rang q dans la définition précédente.

Théorème 5

Toute suite convergente est bornée.

Remarque 8

La réciproque du résultat du théorème précédent est fausse. Par exemple, considérons la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est bornée, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1$$

Pourtant cette suite n'a pas de limite !

2.2. Théorème de la limite monotone

Théorème 6 (de la limite monotone)

(1) Soit (u_n) une suite croissante.

Si (u_n) est majorée par un réel M, alors (u_n) converge vers une limite ℓ (avec $\ell \leq M$), sinon (u_n) diverge vers $+\infty$.

(2) Soit (u_n) une suite décroissante.

Si (u_n) est minorée par un réel m, alors (u_n) converge vers une limite ℓ (avec $\ell \geq m$), sinon (u_n) diverge vers $-\infty$.

Remarque 9

Le lecteur ira relire le premier cours sur les suites pour se remémorer la définition d'une suite monotone et la définition d'une suite strictement monotone.

Exemple 6

On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Après avoir justifié que, pour tout entier naturel $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, démontrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.