Thème 16 - Probabilités - cours n°3 : variables aléatoires finies et lois usuelles

Dans tout ce chapitre, on considère un univers **fini** Ω et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

1. Notion de variable aléatoire

1.1. Premières définitions et notations

Définition 1
On appelle **variable aléatoire finie** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ prenant un nombre fini de valeurs. L'ensemble des valeurs prises par la variables aléatoire X (qui est donc fini) est appelé **support de $\boldsymbol{X}$**, ou **univers image de $\boldsymbol{X}$**, et est noté $\boldsymbol{X(\Omega)}$.

Illustration de la définition 1 :

Exemple 1
(1) Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On effectue 3 tirages successifs et avec remise d'une boule dans cette urne. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues. On a alors $Y(\Omega) = [\![0; 3]\!]$.
(2) On considère une pièce équilibrée. On la lance 4 fois de suite. On appelle Z la variable aléatoire égale au rang du premier $face$ obtenu le cas échéant, ou égale à -1 si $face$ n'est pas sorti au cours de ces 4 lancers. On a alors $Z(\Omega) = \{-1; 1; 2; 3; 4\}$.

Remarque 1
Avec les notations de la définition précédente :
(1) Pour tout réel a et tout sous-ensemble I de $\mathbb{R}$:
- l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\}$ est noté $[X = a]$;
- l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq a\}$ est noté $[X \geq a]$;
- l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$ est noté $[X \leq a]$;
- l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) > a\}$ est noté $[X > a]$;
- l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\}$ est noté $[X < a]$;
- l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$ est noté $[X \in I]$.

Tous ces ensembles sont des sous-ensembles de l'univers Ω, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire des **événements de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$**.
(2) On trouve aussi la notation avec des parenthèses à la place de crochets.

Exemple 2
Reprenons l'exemple précédent.
(1) En notant, pour tout entier i de $[\![1; 3]\!]$, N_i l'événement « on obtient une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage », on a :

$$[Y = 1] = (N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$$
$$[Y = 3] = N_1 \cap N_2 \cap N_3$$
$$[Y < 1{,}5] = [Y = 0] \cup [Y = 1] = (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$$

(2) On peut noter $\Omega = \{p; f\}^4$. On a alors :

$$[Z = -1] = \{(p, p, p, p)\}$$
$$[Z = 4] = \{(p, p, p, f)\}$$
$$[Z \geq 3] = [Z = 3] \cup [Z = 4] = \{(p, p, f, p), (p, p, f, f), (p, p, p, f)\}$$

Remarque 2

L'an prochain sera abordée la notion plus générale de variable aléatoire discrète, dont le support, même s'il reste discret (c'est-à-dire un ensemble non continu), n'est plus nécessairement fini : par exemple, si on lance une pièce jusqu'à temps qu'on obtienne $face$ (et on s'arrête), la variable aléatoire X donnant le nombre de lancers nécessaires a pour support $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
La notion de variable aléatoire à densité sera également abordée. Dans ce cas, le support de la variable aléatoire n'est plus discret mais est un intervalle de nombres réels (donc un ensemble continu). Par exemple, lorsqu'on tire un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0; 1]$, la variable aléatoire X égale à ce nombre a pour support $X(\Omega) = [0; 1]$.

1.2. Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie

Définition 2

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto P(X \leq t) \end{array}$ est appelée **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.
On note cette fonction $\boldsymbol{F_X}$.

Remarque 3

Avec les notations précédentes, on écrit souvent $P(X = a), P(X \leq a)$, etc. On devrait normalement écrire $P([X = a]), P([X < a])$, etc. Cet abus de notation est autorisé.

Exemple 3

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite. La variable aléatoire V est égale au nombre de $pile$ obtenus.
Tracer la courbe représentative de la fonction de répartition F_V de V.

Proposition 1

Soient X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et F_X sa fonction de répartition. On a alors :
(1) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;
(2) F_X est continue à droite en tout réel a (mais pas nécessairement à gauche) ;
(3) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X = 1$.

2. Loi et moments d'une variable aléatoire finie

Dans tout ce paragraphe 2, on considère une variable aléatoire finie X sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Le support $X(\Omega)$ de X étant fini (par définition), on notera $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ pour un certain entier naturel non nul n. On note également F_X sa fonction de répartition.

2.1. Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 3
L'application $\begin{array}{l} X(\Omega) \to \mathbb{R} \\ x_i \mapsto P(X = x_i)\,(i \in [\![1; n]\!]) \end{array}$ est appelée **loi de probabilité de X** (ou plus simplement **loi de X**).

Remarque 4
(1) En pratique, on présente usuellement la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau à deux lignes, en faisant figurer sur la première ligne les différents éléments x_i de $X(\Omega)$ et sur la seconde les probabilités $P(X = x_i)$ correspondantes, cela pour tout entier i appartenant à $[\![1; n]\!]$.
(2) Déterminer la loi d'une variable aléatoire X consiste donc à déterminer les valeurs x_i susceptibles d'être prises par X (c'est-à-dire $X(\Omega)$), puis les probabilités $P(X = x_i)$, cela pour tout entier i appartenant à $[\![1; n]\!]$.

Exemple 4
Déterminer la loi de la variable aléatoire Y de l'exemple 1 (1).

Proposition (et définition) 2
(1) La famille d'événements $([X = x_i])_{1 \le i \le n}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d' événements associé à X**.
(2) On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Exemple 5
Dans l'exemple précédent, la famille $([Y = k])_{0 \le k \le 3}$ est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire Y.

Remarque 5
(1) Le résultat précédent indique qu'en présentant la loi de X sous la forme d'un tableau, la somme des éléments de la deuxième ligne est égale à 1.
(2) La notion de système complet associé à une variable aléatoire est très importante :
- c'est souvent une telle famille que l'on utilise pour appliquer la formule des probabilités totales ;
- il est fréquent en pratique que l'on utilise ces événements pour « traduire » la probabilité que l'on cherche.

Proposition 3
(1) Pour tout couple $(a;b)$ de réels tels que $a < b$, on a :
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$
(2) Si X est à valeurs entières (c'est-à-dire si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$), on a aussi, pour tout entier k de $X(\Omega)$:
$$\text{si } k-1 \in X(\Omega), P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$$

Remarque 6
La proposition précédente a pour conséquence que la fonction de répartition F_X détermine exactement la loi de X. Ainsi, si des variables aléatoires finies ont la même fonction de répartition, elles ont la même loi.

Exemple 6
(1) Vérifier que dans l'exemple 4 précédent, on a bien $P\left(\frac{1}{2} < Y \leq \frac{5}{2}\right) = F_Y\left(\frac{5}{2}\right) - F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$.
(2) Vérifier que dans l'exemple 3 précédent, $P(V = 1) = F_V(1) - F_V(0)$.

2.2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire finie

Définition 4
On appelle **espérance mathématique de X** (ou plus simplement espérance de X) le réel noté $\boldsymbol{E(X)}$ et défini par :
$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \times P(X = x_i)\right)}$$

Remarque 7
Avec les notations de la définition précédente :
(1) En présentant la loi de X sous la forme d'un tableau, l'espérance de X est obtenue en additionnant les produits des deux réels de chaque colonne.
(2) L'espérance d'une variable aléatoire peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs.
Ainsi, dans un jeu d'argent modélisé par une variable aléatoire X donnant le gain du joueur:
- on peut interpréter $E(X)$ comme le gain moyen par partie que peut espérer le joueur ;
- si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable ;
- si $E(X) > 0$, on dit que le jeu est favorable au joueur ;
- si $E(X) < 0$, on dit que le jeu est défavorable au joueur.
(3) L'espérance de X a la même unité que X. Par exemple, si X donne le gain d'un joueur en euro, son espérance est également en euro.

Exemple 7
Déterminons l'espérance de la variable aléatoire Y de l'exemple 1 (1) et interprétons le résultat.

Définition 5
On dit que X est **centrée** lorsque $\boldsymbol{E(X) = 0}$.

Exemple 8
La variable aléatoire Y de l'exemple 1 (1) est-elle centrée ?

2.3. Loi d'une fonction d'une variable aléatoire finie et théorème de transfert

Proposition 4
Soit une fonction φ définie sur $\mathcal{D}_\varphi$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_\varphi$.
L'application $\boldsymbol{\varphi \circ X}$ de Ω dans $\mathbb{R}$, souvent notée $\varphi(X)$, est une **variable aléatoire finie**.
Le support de $\varphi(X)$ est $\{\varphi(x_1); \varphi(x_2); \dots ; \varphi(x_n)\}$

Illustration de la proposition 4 :

Exemple 8
(1) Avec $(a; b)$ un couple de réels fixés, alors l'application $a.X + b$ est une variable aléatoire finie, puisque $a.X + b = \varphi(X)$, où φ est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax + b$. Cette variable aléatoire est définie par :

$$\forall\omega \in \Omega, (a.X + b)(\omega) = a \times X(\omega) + b$$

Son support est $(a.X + b)(\Omega) = \{a \times x_i + b, i \in [\![1; n]\!]\}$, c'est-à-dire :

$$(a.X + b)(\Omega) = \{ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b\}$$

(2) L'application X^2 est une variable aléatoire finie, puisque $X^2 = \varphi(X)$, où φ est la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^2$. Cette variable aléatoire est définie par :

$$\forall\omega \in \Omega, (X^2)(\omega) = \left(X(\omega)\right)^2$$

Son support est $(X^2)(\Omega) = \{x_i^2, i \in [\![1; n]\!]\}$, c'est-à-dire :

$$(X^2)(\Omega) = \{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\}$$

(3) Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, l'application $\sqrt{X}$ est une variable aléatoire finie, puisque $\sqrt{X} = \varphi(X)$, où φ est la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Cette variable aléatoire est définie par :

$$\forall\omega \in \Omega, \left(\sqrt{X}\right)(\omega) = \sqrt{X(\omega)}$$

Son support est $\left(\sqrt{X}\right)(\Omega) = \left\{\sqrt{x_i}, i \in [\![1; n]\!]\right\}$, c'est-à-dire :

$$\left(\sqrt{X}\right)(\Omega) = \left\{\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_3}\right\}$$

Remarque 8
Le (1) de l'exemple précédent présente un abus de notation, car la somme $a.X + b$ n'a pas de sens ! En effet, la somme d'une variable aléatoire et d'un réel n'est pas définie ! En toute rigueur, on devrait écrire $a.X + Z$, où Z est la variable aléatoire constante égale à b. Cet abus de notation étant courant, on le présente ici dans ce cours.

Théorème 1 (dit « **de transfert** »)
Soit une fonction φ définie sur $\mathcal{D}_\varphi$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_\varphi$.
On a le résultat suivant :

$$\boldsymbol{E\left(\varphi(X)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i) \times P(X = x_i)\right)}$$

Remarque 9
Le théorème précédent permet de calculer l'espérance d'une variable aléatoire de la forme $\varphi(X)$ sans avoir à déterminer sa loi.

Exemple 9
On suppose que T est une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

t_i	-1	0	2	5
$P(T = t_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $T^3 - 2.T + 1$.

<u>Proposition 5</u> (**linéarité de l'espérance**)
Soit $(a; b)$ un couple de réels fixés.
(1) On a :

$$\boldsymbol{E(a.X + b) = a \times E(X) + b}$$

(2) Avec Y une autre variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de support $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, où m est un entier naturel non nul fixé. On a les résultats suivants :
(i) $a.X + b.Y$ est une variable aléatoire finie de support :

$$(a.X + b.Y)(\Omega) = \{a \times x_i + b \times y_j, (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]\}$$

(ii) $\boldsymbol{E(a.X + b.Y) = a \times E(X) + b \times E(Y)}$

<u>Démonstration</u> : conséquence du théorème de transfert et de la propriété de linéarité de la somme.

<u>Exemple 10</u>
Démontrons que la variable aléatoire $W = X - E(X)$ est centrée.

2.4. Moment d'ordre 2, variance et écart-type d'une variable aléatoire finie

<u>Définition 6</u>
L'espérance de la variable aléatoire X^2 est appelé **moment d'ordre 2 de X**. Ce moment d'ordre 2 est donc égal à :

$$\boldsymbol{E(X^2) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 \times P(X = x_i))}$$

<u>Exemple 11</u>
Déterminer le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire T de l'exemple 9.

<u>Définition 7</u>
(1) On appelle **variance de X** le réel noté $\boldsymbol{V(X)}$ et défini par :

$$\boldsymbol{V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(x_i - E(X)\right)^2 \times P(X = x_i)\right)}$$

(2) On appelle **écart-type de X** le réel noté $\boldsymbol{\sigma(X)}$ et défini par :

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

<u>Remarque 10</u>
Avec les notations précédentes :
(1) L'espérance de X peut être vue comme son moment d'ordre 1 :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \times P(X = x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 \times P(X = x_i)\right)$$

(2) La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire sont positifs.
(3) La deuxième égalité du (1) de la définition précédente découle du théorème de transfert.
(4) La variance d'une variable aléatoire X est égale au moment d'ordre 2 de la variable aléatoire $X - E(X)$.
(5) L'espérance d'une variable aléatoire donne sa valeur moyenne. La variance permet d'obtenir une information complémentaire : la variance est un indicateur de la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne (plus la variance est proche de 0, plus la variable aléatoire prend des valeurs concentrées autour de son espérance).

(6) Avec les notations précédentes, l'écart type de X, contrairement à la variance, est un indicateur de dispersion ayant la même unité que la variable aléatoire. Par exemple, si X donne un gain en euro, l'écart-type s'exprime également en euro (alors que la variance est en euro au carré).

Définition 8
On dit que X est **réduite** lorsque $\boldsymbol{V(X) = 1}$.

Théorème 2 (dit de « **Kœnig-Huygens** »)
On a le résultat suivant :

$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \times P(X = x_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \times P(X = x_i)\right)\right)^2}$$

Démonstration : la deuxième égalité résulte directement du théorème de transfert et de la définition de l'espérance.

Remarque 11
C'est presque toujours le résultat précédent que l'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une variable aléatoire.

Exemple 12
Déterminer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire T de l'exemple 9.

Proposition 8
Soit $(a; b)$ un couple de nombres réels.
On a le résultat suivant :

$$\boldsymbol{V(a.X + b) = a^2 \times V(X)}$$

Exemple 13
(1) Reprenons l'exemple 9. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $U = -2.T + 5$.
(2) Supposons que X est de variance non nulle. On pose alors la variable aléatoire $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{X}}$.
Démontrer que X^* est centrée et réduite.

3. Lois finies usuelles

3.1. Loi certaine

Définition 9 (loi certaine)
Soit X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que **X suit une loi certaine** lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur a, où a est un réel fixé.
Autrement dit, X suit une loi certaine **lorsqu'il existe un réel a tel que $X(\Omega) = \{a\}$**.
On dit également que **X est la variable aléatoire certaine égale à a**.

Proposition 9
Avec les notations de la définition précédente, on a :
(1) $\boldsymbol{E(X) = a}$;
(2) $\boldsymbol{V(X) = 0}$.

Démonstration : en exercice.

Exemple 14
Soit X la variable aléatoire certaine égale à 1. On a alors $E(X) = 1, V(X) = 0$ et $\sigma(X) = 0$.

Théorème 3
Soit X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Si X est de variance nulle (c'est-à-dire si $V(X) = 0$), alors **X suit une loi certaine**.

3.2. Loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$

Définition 10 (loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$)
Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et n un entier naturel non nul.
On dit que **X suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$**, ce que l'on peut noter $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])}$, lorsque :
- $\boldsymbol{X(\Omega) = [\![1; n]\!]}$;
- $\boldsymbol{\forall k \in [\![1; n]\!], P(X = k) = \frac{1}{n}}$.

Exemple 15
On prélève au hasard une boule dans une urne opaque contenant 12 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 12. La variable aléatoire X égale au numéro obtenu suit alors la loi uniforme sur $[\![1; 12]\!]$.

Proposition 10
Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, où n est un entier naturel non nul.
On a les résultats suivants :
(1) $\boldsymbol{E(X) = \frac{1+n}{2}}$;
(2) $\boldsymbol{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$.

Démonstration : en exercice.

Exemple 16
Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire de l'exemple précédent.

3.3. Loi de Bernoulli de paramètre p

Définition 11 (épreuve de Bernoulli)
On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire à **deux issues**.

Remarque 12
Lorsque l'on considère une épreuve de Bernoulli, on peut décider de manière arbitraire que l'une des deux issues est le « succès » et l'autre issue « l'échec ».

Définition 12 (loi de Bernoulli de paramètre p)
Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et p un réel de l'intervalle $[0; 1]$.
On dit que **X suit la loi de Bernoulli de paramètre p**, ce que l'on peut noter $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)}$, lorsque :
- $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0; 1\}}$;
- $\boldsymbol{P(X = 1) = p}$ et $\boldsymbol{P(X = 0) = 1 - p}$.

Remarque 13
Toute épreuve de Bernoulli peut être modélisée par une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli, en notant 1 et 0 les deux résultats obtenus : 1 pour le succès et 0 pour l'échec.

Exemple 17
On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise, dans une urne qui contient deux boules rouges et quinze boules noires. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale, au n-ième tirage, à 1 si on obtient une boule rouge et 0 sinon. Pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{17}$.

Proposition 11
Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.
On a les résultats suivants :
(1) $\boldsymbol{E(X) = p}$;
(2) $\boldsymbol{V(X) = p(1 - p)}$.

Démonstration : en exercice.

Exemple 18
Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire de l'exemple précédent.

3.4. Loi binomiale de paramètres n et p

Définition 13 (loi binomiale de paramètres n et p)
Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, p un réel de l'intervalle $[0; 1]$ et n un entier naturel non nul.
On dit que $\boldsymbol{X}$ **suit la loi binomiale de paramètres** $\boldsymbol{n}$ **et** $\boldsymbol{p}$, ce que l'on peut noter $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)}$, lorsque :
- $\boldsymbol{X(\Omega) = [\![0; n]\!]}$;
- $\boldsymbol{\forall k \in [\![0; n]\!], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$.

Remarque 14
Avec les notations de la définition précédente, dans le cas particulier $n = 1$, on obtient une loi de Bernoulli.

Théorème 4
Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, p un réel de l'intervalle $[0; 1]$ et n un entier naturel non nul.
Si X est une variable aléatoire qui compte le **nombre de succès** lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes** de paramètre p, alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple 19
Reprenons l'exemple précédent. Les tirages étant avec remise, on répète ici n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « on obtient une boule rouge » de probabilité $\frac{2}{17}$.
Ainsi, la variable Y qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{17}$.

Proposition 12
Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi binomiale de paramètres n et p, où p est un réel de l'intervalle $[0; 1]$ et n un entier naturel non nul.
On a les résultats suivants :
(1) $\boldsymbol{E(X) = np}$;
(2) $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$.

Démonstration : admise.

Exemple 20
Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire de l'exemple précédent.

4. Variables aléatoires indépendantes

Définition 14 (variables aléatoires indépendantes)
Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que les variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ **et** $\boldsymbol{Y}$ **sont indépendantes** lorsque, **pour tous sous-ensembles** $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ **de** $\mathbb{R}$, on a :

$$\boldsymbol{P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P([X \in A]) \times P([Y \in B])}$$

Autrement dit, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque, **pour tous sous-ensembles** $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ **de** $\mathbb{R}$, les événements $[\boldsymbol{X \in A}]$ **et** $[\boldsymbol{Y \in B}]$ **sont indépendants**.

Proposition 13
Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, où n et m sont deux entiers naturels non nuls.
On dit que les variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ **et** $\boldsymbol{Y}$ **sont indépendantes si, et seulement si** :

$$\forall (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) \in [\![\boldsymbol{1}; \boldsymbol{n}]\!] \times [\![\boldsymbol{1}; \boldsymbol{m}]\!], \boldsymbol{P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = P([X = x_i]) \times P\big([Y = y_j]\big)}$$

Démonstration : admise.

Remarque 15
(1) Les deux définition et proposition précédentes se généralisent à trois variables aléatoires ou plus. On parle alors de **variables aléatoires mutuellement indépendantes**.
(2) Lors d'expériences aléatoires indépendantes, des variables aléatoires définies relativement à des expériences aléatoires deux à deux distinctes sont mutuellement indépendantes (cf. l'exemple qui suit).
(3) On abrège souvent « mutuelle indépendance » en « indépendance ».

Exemple 21
(1) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N (où N est un entier naturel supérieur ou égal à 2). On effectue n tirages d'une boule avec remise (où $n \in \mathbb{N}^*$) et, pour tout entier k de $[\![1; n]\!]$, on note Z_k le numéro de la boule tirée au k-ème tirage.
Les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont alors mutuellement indépendantes.
(2) On considère deux variables aléatoires X et Y suivant les lois uniformes sur $[\![1; n]\!]$ et $[\![1; m]\!]$ respectivement, où $(m; n)$ est un couple d'entiers naturels non nuls. On suppose que X et Y sont indépendantes. On pose enfin la variable aléatoire Z telle que $Z = X + Y$.
Déterminer :
(a) $P([Z = 2])$;
(b) $P([Z = m + n])$;
(c) $P([Z = m + n - 1])$.