Fiche de cours – algèbre et logique : dénombrement et coefficients binomiaux

On rappelle que pour tout entier naturel p, la **factorielle de p**, que l'on note $p!$, ce que l'on prononce « **factorielle p** », désigne le nombre entier naturel égal à :

$$\boldsymbol{p! = \begin{cases} 1 \text{ si } p = 0 \\ \prod_{i=1}^{p} i = 1 \times 2 \times \ldots \times p \text{ si } p \geq 1 \end{cases}}$$

1. Arrangements, permutations et nombre de parties d'un ensemble

Exemple 1

On considère une urne opaque contenant 7 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 7.
On effectue dans cette urne 3 tirages **avec remise** d'une boule, en notant à chaque fois le numéro obtenu.
Combien de triplets différents peut-on obtenir ?

Proposition 1 (généralisation)

Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$. On considère un ensemble E à n éléments.
On note F l'ensemble des **k-uplets d'éléments de E non nécessairement distincts**.
On a alors :

$$card(F) = \boldsymbol{n^k}$$

Démonstration : comme on l'a vu dans le thème sur les ensembles, on a

$$card(F) = card(E \times E \times \ldots \times E) = card(E^k) = \left(card(E)\right)^k = n^k$$

Exemple 2

On considère une urne opaque contenant 7 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 7.
On effectue dans cette urne 3 tirages **sans remise** d'une boule, en notant à chaque fois le numéro obtenu.
Combien de triplets différents peut-on obtenir ?
Combien de 7-uplets différents peut-on obtenir ?

Proposition 2 (généralisation)

Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$. On considère un ensemble E à n éléments.
On note F l'ensemble des **k-uplets d'éléments de E deux à deux distincts**.
On a alors :

$$card(F) = \boldsymbol{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Démonstration : un arbre des cas possibles suffit à justifier ce résultats. Démontrons la 2ème égalité.

Définition 1 (d'un arrangement de k éléments dans un ensemble à n éléments)

Avec les notations de la proposition précédente, un k-uplet d'éléments deux à deux distincts de E est appelé **arrangement de k éléments de E**.

Le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments est souvent noté $\boldsymbol{\mathcal{A}_k^n}$.
On a alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

<u>Définition 2</u> (cas particulier des permutations de E)
Avec les notations de la définition précédente, on appelle **permutation de E** tout arrangement de n éléments de E.

<u>Proposition 3</u>
Avec les notations de la définition précédente, il y a exactement **$n!$ permutations de E**.

<u>Démonstration :</u>

<u>Remarque 1</u>
(1) La proposition 3 est un cas particulier de la proposition 2 en prenant $k = n$.
(2) Il existe une autre définition (équivalente) d'une permutation de E :

une permutation de E est une bijection de E sur E

<u>Exemple 3</u>
On considère une urne opaque contenant 7 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 7.
On effectue dans cette urne un tirage simultané de 3 boules de l'urne.
Combien de mains de 3 boules différentes peut-on obtenir ? (On appelle « main de 3 boules » tout ensemble non ordonné de 3 boules deux à deux distinctes.)

<u>Proposition 4</u> (généralisation)
Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$. On considère un ensemble E à n éléments.
On note F l'ensemble des **parties à k éléments de E**, c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles de E à k éléments.
On a alors :

$$card(F) = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}_k^n}}{\boldsymbol{k!}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{k!(n-k)!}}$$

<u>Démonstration :</u> généralisation de l'exemple précédent.

<u>Définition 3</u> (des coefficients binomiaux)
Avec les notations de la définition précédente, le **nombre de parties à k éléments de E** est noté $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$ et appelé **nombre de combinaisons à k éléments de E** ou **coefficient binomial « k parmi n »**.
On a alors :

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{\mathcal{A}_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

<u>Remarque 2</u>
Avec les notations précédentes :
(1) Les définition et proposition précédentes restent valable pour $k = 0$. En effet, il y a une seule partie à 0 élément de E : l'ensemble vide. Or le nombre $\frac{n!}{0!(n-0)!}$ est bien égal à 1. En effet :

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

De même, en examinant le cas particulier $k = n$, on peut remarquer qu' il y a une seule partie de E à n éléments : E lui-même ! Or le nombre $\frac{n!}{n!(n-n)!}$ est bien égal à 1. En effet :

$$\frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!\times 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

En outre, par convention, si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$: en effet, aucune partie de E ne contient strictement plus de n éléments !

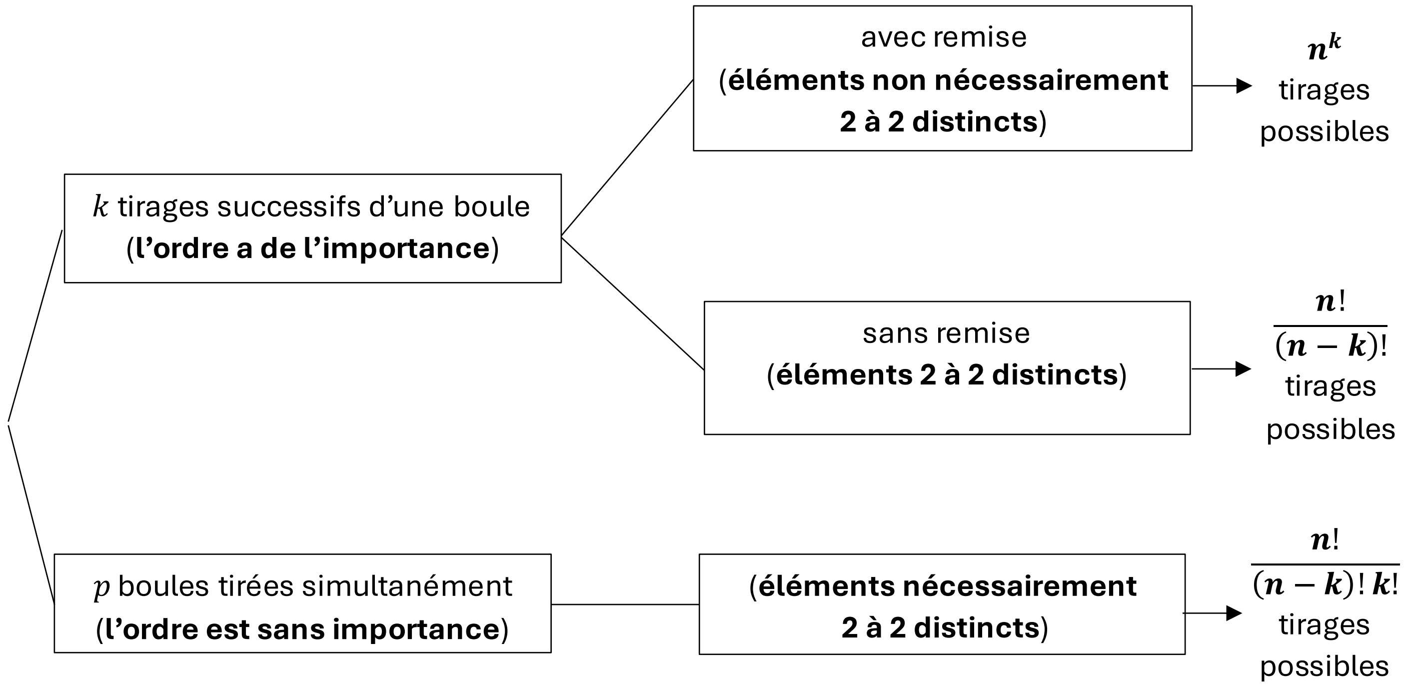
Enfin la formule précédente reste encore valable pour $n = k = 0$. En effet il y a une seule partie à 0 élément dans l'ensemble vide : l'ensemble vide lui-même ($\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$). Or le nombre $\frac{0!}{0!(0-0)!}$ est bien égal à 1. En effet :

$$\frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1\times 1} = 1$$

(2) Lorsque l'on parle d'un k-uplet d'éléments de E (distincts ou non), on parle d'un ensemble ordonné. Ce qui n'est pas le cas avec une partie de E !

(3) Ainsi, le nombre $\binom{n}{k}$ est aussi égal au nombre de façons de choisir k objets distincts parmi n objets donnés (l'ordre n'ayant aucune importance).

(4) Pour résumer, lorsqu'on prélève k éléments dans un ensemble à n éléments, on a les différents cas suivants :



2. Propriétés des coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Proposition 5 (propriétés des coefficients binomiaux)

(1) Soit n un entier naturel. On a :

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \mathbf{1}$

(ii) avec $n \geq 1$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = \boldsymbol{n}$

(2) Soient n et k deux entiers naturels avec $k \leq n$. On a :

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (« **symétrie** » des coefficients binomiaux)

(3)

- Soient n et k deux entiers naturels avec $1 \leq k \leq n$. On a :

$$\boldsymbol{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

- Soient n et k deux entiers naturels avec $2 \leq k \leq n$. On a :

$$\boldsymbol{k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}}$$

(4) Soient n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n-1$. On a :

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$ (« **formule du triangle de Pascal** »)

Démonstration : en exercice.

Théorème 1 (« formule du **binôme de Newton** »)

Soient a et b deux nombres réels, ainsi qu'un entier naturel n. On a :

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Démonstration : admise.

Remarque 3

(1) Avec les notations du théorème précédent, puisque la somme et le produit sont commutatifs dans $\mathbb{R}$, on a aussi :

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(2) Cette formule explique pourquoi les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés « coefficient binomiaux ».

(3) Grâce à cette formule et à la formule du triangle de Pascal, il est facile de trouver de « nouvelles » identités remarquables, comme on va le voir dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 4

(1) Démontrons le théorème suivant :

Théorème 2

Soient n un nombre entier naturel et E un ensemble à n éléments.

Le nombre de parties de E est égal à 2^n, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{card(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$$

(2)

(a) Compléter le tableau ci-dessous, donnant les coefficients binomiaux, à l'aide de la formule du triangle de Pascal.

(b) En déduire, pour tous réels a et b, les identités remarquables $(a+b)^7$ et $(a-b)^7$.

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Exemple 5 (exercices)

Exercice 1

On dispose de 15 livres distincts. On demande à une personne de les ranger dans un compartiment de bibliothèque. On suppose que les livres seront disposés -tranche visible - les uns a côté des autres.

De combien de façons peut-on ainsi ranger ces livres ?

Exercice 2

On appellera anagramme d'un mot toute réorganisation des symboles (d'un alphabet) constituant l' écriture de ce mot. En mathématiques, cette considération se fait indépendamment du sens donné au mot. Ainsi, « ETC » est un anagramme de « ECT » (les deux mots ont du sens en français), de même que « TAHC » est un anagramme (au sens mathématique) de « CHAT ».

(1) Combien peut-on dénombrer d'anagrammes du mot « TABLE » ? Du mot « CHAISE » ?

(2) Combien d'anagrammes le mot « ETUDIER » possède-t-il ? Le mot « INFINITIF » ?

(3) Combien d'anagrammes le mot « ECONOMIE » possède-t-il ?

Exercice 3

Une course de chevaux est organisée avec 15 concurrents. Les parieurs s'intéressent aux ordres d' arrivées de ces chevaux sur une course donnée.

(1) On connait les numéros des cinq premiers arrivés. De combien de façons peut-on ranger ces cinq chevaux pour former des quintés ?

(2) On connaît les numéros des trois premiers arrivés (ils forment un tiercé). De combien de façons peut-on ranger les douze chevaux qui suivent ?

(3) On suppose que chaque cheval a les mêmes chances de se placer dans une position du classement que les autres.

- (a) Ayant misé sur un quinté, quelle est la probabilité d'obtenir un billet gagnant dans l'ordre ? dans le désordre ?
- (b) Ayant misé sur un tiercé, quelle est la probabilité d'obtenir un billet gagnant dans l'ordre ? dans le désordre ?

Exercice 4

Déterminer le nombre de grilles d' *Euromillion* possibles, sachant qu'une telle grille est remplie en cochant cinq numéros du quadrillage principal, constitué de 50 nombres, plus deux numéros « étoiles » choisis entre les valeurs 1 à 12.

Exercice 5

Calculer les coefficients binomiaux suivants :

(1) $\binom{7}{3}$ (2) $\binom{18}{2}$ (3) $\binom{11}{6}$ (4) $\binom{9}{2}$ (5) $\binom{18}{16}$ (6) $\binom{9}{3}$

Exercice 6

(1) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \binom{n+1}{2}$.

(2) Déterminer la valeur, pour tout entier naturel n non nul, de chacune des sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}$ (b) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$ (c) $\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n}{k}$ (d) $\sum_{k=2}^{n}\binom{n+2}{k}$ (e) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+2}$

(f) $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k$ (où $x \in \mathbb{R}$) (g) $\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k}(-x)^{k+2}$ (où $x \in \mathbb{R}$) (h) $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k\binom{n}{k+1}x^k$