Fiche de cours – fonctions numériques : passage à la limite dans les inégalités, théorèmes de comparaison

<u>Théorème 1</u> (dit de l'encadrement ou « des gendarmes »)
La lettre α désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$. Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de α, ainsi qu'un réel ℓ, tels que :
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \ell$;
- pour tout réel x voisin de α, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \ell$.

<u>Exemple 1</u>
(1) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$. On cherche dans cette question à déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ avec deux méthodes différentes.

(a) <u>1ère méthode</u>
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ directement en utilisant les opérations sur les limites.

(b) <u>2ème méthode</u>
Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

(2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. On cherche dans cette question à déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec deux méthodes différentes.

(a) <u>1ère méthode</u>
Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ directement en utilisant les opérations sur les limites.

(b) <u>2ème méthode</u>
Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $x^2 \leq x^2 + 1 \leq (x+1)^2$. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>Remarque 1</u>
(1) Dans le théorème précédent, dans l'expression « pour tout réel voisin de α », il faut comprendre :
- pour tout réel x d'un intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A un réel, dans le cas où α désigne $+\infty$;
- pour tout réel x d'un intervalle de la forme $]-\infty; B[$, avec B un réel, dans le cas où α désigne $-\infty$;
- pour tout réel x d'un intervalle de la forme $]\alpha - r; \alpha + r[$, avec r un réel strictement positif, dans le cas où α désigne un réel.

(2) Le théorème précédent reste vrai si α est un réel et que l'on s'intéresse uniquement aux limites à droite en α ou à gauche en α. Dans ce cas, dans l'expression « pour tout réel voisin de α », il faut comprendre :
- pour tout réel x d'un intervalle de la forme $]\alpha - r; \alpha[$, avec r un réel strictement positif, dans le cas où on s'intéresse uniquement à la limite à gauche ;
- pour tout réel x d'un intervalle de la forme $]\alpha; \alpha + r[$, avec r un réel strictement positif, dans le cas où on s'intéresse uniquement à la limite à droite.

Théorème 2

La lettre α désigne $-\infty$ ou $+\infty$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de α telles que, pour tout réel x voisin de $\alpha, f(x) \leq g(x)$.

(1) Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ (théorème de comparaison par minoration) ;

(2) Si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ (théorème de comparaison par majoration).

Exemple 2

(1) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$. On cherche dans cette question à déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec deux méthodes différentes.

(a) 1ère méthode

En remarquant que, pour tout réel x strictement positif, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) 2ème méthode

Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1; +\infty[$, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \leq f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(2) On considère la fonction partie entière k (notée $floor$ en anglais). On rappelle qu'elle est définie pour tout réel x par $k(x) = \lfloor x \rfloor$, où la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.

(a) Justifier que, pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

(b) En déduire un encadrement de $k(x)$.

(c) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$.

(3) On se propose de démontrer dans cette question que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

(a) En étudiant la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$, démontrer que, pour tout réel x de cet intervalle, $e^x \geq x + 1$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x$.

Théorème 3 (passage à la limite dans les inégalités)

La lettre α désigne $-\infty$ ou $+\infty$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de α telles que, pour tout réel x voisin de $\alpha, f(x) \leq g(x)$. On suppose que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell_2$, où $(\ell_1; \ell_2)$ est un couple de réels fixés. On a alors :

$$\ell_1 \leq \ell_2$$

Remarque 2

(1) Les deux théorèmes précédents reste vrais si α est un réel et que l'on s'intéresse uniquement aux limites à droite en α ou à gauche en α. Le lecteur se reportera à la remarque précédente pour revoir ce que l'on entend alors par « pour tout réel x voisin de α ».

(2) Attention, le théorème précédent sous-entend que, même si pour tout réel x voisin de α, $f(x) < g(x)$, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Exemple 3

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f(x) < \frac{x+1}{x+2}$;
- la fonction f admet pour limite le réel ℓ en $+\infty$.

Déterminer un encadrement de ℓ.