Fiche de cours – symbole de sommation

Définition 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite numérique.
Pour tout entier naturel n, la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ peut être notée $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Plus généralement, avec m et n deux entiers naturels tels que $m \leq n$, la somme $u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$ peut être notée $\sum_{k=m}^{n} u_k$.
Dans ces deux sommes, le nombre entier naturel k s'appelle l'indice de sommation, les entiers m et n s'appellent les bornes (de la 2ème somme).

Exemple 1
On a :
$1 + 2 + 3 + \cdots + 456 = \sum_{k=1}^{456} k$;
pour tout entier naturel non nul n, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;
pour tout entier naturel p et pour tout nombre réel q, $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{p} q^k$.

Propriété 1
Avec les notations de la définition précédente :
- pour tout entier naturel n, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ contient $n+1$ termes ;
- pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum_{k=1}^{n} u_k$ contient n termes ;
- pour tous entiers naturels m et n tels que $m \leq n$, la somme $\sum_{k=m}^{n} u_k$ contient $n - m + 1$ termes.

Exemple 2
La somme $\sum_{k=1}^{456} k$ contient 456 termes ;
pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ contient n termes ;
pour tout entier naturel p et pour tout nombre réel q, la somme $\sum_{k=0}^{p} q^k$ contient $p+1$ termes.

Remarque 1
En particulier, avec les notations de la propriété précédente, lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \text{ ; } \sum_{k=1}^{n} 1 = n \text{ et } \sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$$

Propriété 2
Soient p un entier naturel, $(u_n)_{n\geq p}$ et $(v_n)_{n\geq p}$ deux suites réelles, m et n deux entiers naturels tels que $p \leq m \leq n$, ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$.
(1) $\sum_{k=m}^{n+1} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_k + u_{n+1}$ (aspect récurrent) ;
(2) $\sum_{k=m}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k$ et $\sum_{k=m}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k$ (on parle de linéarité de la somme) ;
(3) $\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{i=m}^{n} u_i = \sum_{j=m}^{n} u_j = \ldots$ (on dit que l'indice de sommation est une variable muette) ;
(4) Avec q un troisième entier naturel tel que $p \leq m \leq n < q$, $\sum_{k=m}^{q} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{q} u_k$ (on parle de regroupement ou de séparation de termes, ou encore de relation de Chasles).

Démonstration :

Exemple 3

Exercices 13 et 14 du TD3.

Propriété 3

(1) Avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$$

De manière plus générale, avec deux entiers naturels m et p tels que $m \leq p$:

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_p = (p-m+1)\frac{(u_m+u_p)}{2}$$

(2) Avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \begin{cases} u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ si\ q \neq 1 \\ (n+1) \times u_0 \ si\ q = 1 \end{cases}$$

De manière plus générale, avec deux entiers naturels m et p tels que $m \leq p$:

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_p = \begin{cases} u_m\frac{1-q^{p-m+1}}{1-q} \ si\ q \neq 1 \\ (p-m+1) \times u_m \ si\ q = 1 \end{cases}$$

Démonstration :

Exemple 4

Certaines sommes des exercices 13 et 14 du TD3 avec une deuxième méthode.