Algèbre et logique - TD n°1 : ensembles de nombres, calculs numériques et littéraux, équations et inéquations

Exercice 1

Dire à quel ensemble le plus petit (au sens de l'inclusion) appartiennent les nombres suivants :

$-\frac{84}{14}$; $-\frac{25}{\sqrt{100}}$; $\frac{5\pi}{15\pi}$; $-3{,}3333$; $-\frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$; $\frac{4{,}1\times10^{-3}}{5\times10^{-4}}$; $1{,}6666\ldots$; $-6\sqrt{3}$; $\frac{240\,000}{6}$; $-\frac{140}{6}$; $\frac{3{,}6}{6}$; $\frac{\pi+3}{\pi+1}$; $\frac{\pi+3}{2\pi+6}$; $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{39}\times\sqrt{3}}{\sqrt{26}}$; $-\frac{3{,}06}{5}$; $\frac{10^3\times10^{-12}\times10^{27}}{10^{-1}\times10^{32}}$.

Exercice 2

Compléter le tableau suivant :

Notation	Description	Illustration sur la droite des réels
$]-4;8[$		
	$\{x\in\mathbb{R}, -1\leq x<12\}$	
	$\{x\in\mathbb{R}, x<-4\}$	
$[5;6]$		
$\mathbb{R}^{*+}$		
$[-\frac{1}{2};+\infty[$		
	$\{x\in\mathbb{R}, x\leq 0\}$	
	$\{x\in\mathbb{R}, 0<x\leq 1\}$	

Exercice 3

Réduire les fractions suivantes jusqu'à les rendre irréductibles :

$$F_1=\frac{48}{40}; F_2=\frac{121}{330}; F_3=\frac{196}{252}; G_1=\frac{56}{63}; G_2=\frac{108}{783}; G_3=\frac{945}{1500}$$

Exercice 4

Donner la notation scientifique des nombres suivants, puis en donner un ordre de grandeur.

(1) $A=4521; B=0{,}0127; C=78{,}125; D=0{,}0324\times10^{-4}; E=0{,}0056\times12500; F=48000\div0{,}015$

(2) $A=756; B=0{,}00551; C=974{,}13; D=5{,}423\times10^{12}; E=12000\times0{,}0035; F=\frac{0{,}045243}{0{,}00009}$

Exercice 5

Pour chacune des situations qui suivent, déterminer un ordre de grandeur en vous basant sur vos connaissances générales :

(1) Quelle distance couvrirait une chaîne humaine formée avec tous les humains de la Terre en écartant les bras ?

(2) Quelle est l'espérance de vie d'un humain exprimée en secondes ?

(3) Exprimer une année-lumière en kilomètres (on rappelle que $c = 299792458\ m.s^{-1}$ est la vitesse de la lumière).

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes au maximum (n désigne un nombre entier relatif) :

$A = \frac{24^{45} \times 100^2}{72^{35} \times 20^{13}}$; $B = \frac{4096 \times 243}{12^6}$; $C = \frac{18^{11} \times 72}{333 \times 540}$; $D = \frac{8^5 - 2^{10}}{512 \times (3^4 + 9^2)}$; $E = \frac{21^{4n-7}}{12^{2n+5} \times 14^{n-8}} \times 4^n$;

$F = \frac{9^{-n+3} \times 12^{n-5}}{3^6 \times 5^{2n-1}} \times \frac{50^n \times 6^{4n-1}}{120^{n+1}}$

Exercice 7

Simplifiez au mieux les expressions suivantes :

(1) $A = \sqrt{(3{,}14 - \pi)^2}$; $B = \sqrt{2304}$; $C = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{50} + \sqrt{242}$; $D = \sqrt{3^2 + 4^2}$

(2) $A = \sqrt{\frac{441}{8}} \times \sqrt{416}$; $B = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{99}} \times \sqrt{\frac{6}{55}}$; $C = 6\sqrt{20} - 4\sqrt{12} + 2\sqrt{45} - 6\sqrt{27} + \sqrt{125}$; $D = 4\sqrt{5} \times 3\sqrt{45}$

Exercice 8

Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$A = \frac{3\sqrt{6}}{2} \times \frac{8}{\sqrt{42}} \; ; B = \frac{2-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \; ; C = \frac{1}{\sqrt{5}-1} \; ; D = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Exercice 9

Développer, réduire et ordonner les expressions algébriques suivantes :

$A(x) = (2x-8)^2 - (5x+4)$; $B(x) = 7(2x-3) - 4(3-5x)$;

$C(y) = (3y+5) + (4y+7)^2$; $D(x) = 6x^2(2x-4) - 3(4-5x)$;

$E(x) = (-5x+6)(4x-2)$; $F(z) = -7z(3z-5)(4z-4)$;

$G(x) = 1 - 2(2x-3)(3+2x)$; $H(x) = x + 1 - (-x+8)(4x+1)(9x-5)$.

Exercice 10

Factoriser les expressions algébriques suivantes :

$A(x) = 3x^2 - 9x$; $B(x) = 2x^2 + x$; $C(x) = 2x^3 - x^2 + 5x$;

$D(t) = (3t+8)(2t-1) - (2t-1)(7t-2)$; $E(x) = (x-4)(8-x) + (2x-8)$;

$F(x) = 9x^2 + 12x + 4$; $G(x) = 4x^2 - 12x + 9$; $H(r) = r^2 - 49 + 2(r+7)$;

$I(x) = 4 - (x+2)^2$; $J(x) = (2x+3)^2 - (x-7)^2$; $K(x) = 9 + 6x + x^2 - 17(x+3) - 7x - 21$.

Exercice 11

Après avoir déterminé l'ensemble des valeurs pour lesquelles chacun des nombres suivants existe, réduire chacun d'entre eux à un seul quotient :

(1) $A(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{1-x}{x+1}$; $B(x) = \frac{3+x}{x+1} - \frac{3x-1}{x-1}$; $C(x) = \frac{5}{2x+1} + \frac{2x+3}{x+2} - \frac{1}{x}$

(2) $A(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2+x} - \frac{1}{1+x}$; $B(x) = \frac{3}{x^2-1} + \frac{5x}{x+1} + \frac{1}{1-x}$; $C(x) = \frac{x}{3x-1} + \frac{2x}{2-x} - \frac{7-x}{x-\frac{1}{3}}$

Exercice 12

Notons $f(x)$ l'expression algébrique $\frac{x-\frac{1}{x}}{2x+\frac{1}{x}}$.

(1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des nombres réels x pour lesquels le nombre réel $f(x)$ existe (c'est-à-dire déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique f).

(2) (a) Déterminer les valeurs de $f(1), f(\frac{1}{2})$ et $f(\sqrt{2})$ (c'est-à-dire déterminer les images par f des nombres $1, \frac{1}{2}$ et $\sqrt{2}$).

(b) Déterminer les valeurs de $f(-1), f(-\frac{1}{2})$ et $f(-\sqrt{2})$.

(c) Que conjecture-ton ? Démontrer cette conjecture. Comment qualifie-t-on une telle fonction ?
(3) Démontrer que pour tout nombre réel de $\mathbb{R}^{*+}$, $f(\sqrt{x}) = \frac{x-1}{2x+1}$.

Exercice 13
Notons $f(x)$ l'expression algébrique $\frac{x}{1+x^2}$.
(1) Justifier que l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des nombres réels x pour lesquels le nombre réel $f(x)$ existe (c'est-à-dire déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique f) est égal à $\mathbb{R}$.
(2) (a) Déterminer les valeurs de $f(1), f(\frac{1}{2})$ et $f(\sqrt{2})$ (c'est-à-dire déterminer les images par f des nombres $1, \frac{1}{2}$ et $\sqrt{2}$).
(b) Déterminer les valeurs de $f(-1), f(-\frac{1}{2})$ et $f(-\sqrt{2})$.
(c) Que conjecture-ton ? Démontrer cette conjecture. Comment qualifie-t-on une telle fonction ?
(3) (a) Exprimer, pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}^*$, le nombre $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction du nombre $f(x)$.
(b) En déduire, pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}^*$, une relation entre les nombres $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ et $f(x)$.
(c) En déduire les valeurs de $f(-2)$ et $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 14
A/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(1) $(E_1): 2x - 3 = 0$; $(E_2): -3x + 6 = 4x + 7$; $(E_3): \frac{5x-5}{4} = \frac{1-2x}{7}$; $(E_4): \frac{x}{2} + 5 = -\frac{x}{3} + \frac{5}{8}$
(2) $(E_1): -4x + 7 = 0$; $(E_2): 2x - 5 = -14x + 1$; $(E_3): \frac{x+5}{3} = \frac{-1+6x}{5}$; $(E_4): -\frac{x}{12} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}x - 2$

B/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(1) $(I_1): -x + 5 > 0$; $(I_2): -2x + 5 \geq 7x + 4$; $(I_3): \frac{x+8}{2} \leq \frac{3+5x}{10}$; $(I_4): -\frac{1}{3}x + 7 < -4x + 9$
(2) $(I_1): -4x - 7 < 0$; $(I_2): x - 5 \leq 14x$; $(I_3): 12x + 4 \geq \frac{5-3x}{4}$; $(I_4): \frac{x}{5} + \frac{1}{15} > x + \frac{2}{30}$

Exercice 15
A/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(1) $(E_1): x^2 - 3x + 2 = 0$; $(E_2): x^2 - 5x = 5x + 12$; $(E_3): y^2 + 5 - 3y = 0$; $(E_4): 4x^2 - 28x = -49$
(2) $(E_1): 2z^2 - 5z = -12$; $(E_2): x^2 - 5x + 6 = 0$; $(E_3): 4x^2 + 4x + 12 = -16x$; $(E_4): \frac{x^2}{9} = -\frac{10x}{3} - 25$

B/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(1) $(I_1): x^2 + 3x - 4 < 0; (I_2): x^2 + x + 1 \geq 0$
(2) $(I_1): 2x^2 + 3x - 5 \geq 0; (I_2): -3x^2 - 30x - 75 < 0$

Exercice 16
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (après avoir déterminé leurs ensembles de validité, cela va de soi) :
(1) $(E_1): \frac{5}{2y+4} = -\frac{7}{y-1}$; $(E_2): (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 - 4x + 1)^2$;
$(E_3): 6x^4 = 3 - 3x^2$; $(E_4): \frac{2}{3-x} + \frac{3}{9-x^2} = 1$
(2) $(E_1): \frac{3}{x-2} - \frac{7}{x+2} - \frac{1}{x^2-2} = 0$; $(E_2): (x-1)(x+2) = \frac{1}{2}(x+10)(x-1)^2$;
$(E_3): x - \sqrt{x} + 1 = 2x + \sqrt{x} - 5; (E_4): x + \frac{3x-25}{x-3} = 0$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (après avoir déterminé leurs ensembles de validité, cela va de soi) :

(I_1): $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x+3}{2-4x}$; (I_2): $\frac{2x+3}{3x+5} > \frac{(3-x)}{1-2x}$

Exercice 18

Résoudre les problèmes suivants :

(1) À chaque rebond, une balle rebondit au cinquième de la hauteur précédente. Quelle distance totale, en mètre, aura-t-elle parcouru avant le troisième rebond, si on la lâche d'une hauteur de 1,6 mètre ?

(2) Déterminer tous les nombres réels dont le double du cube est égal au triple.

(3) Une bouteille contient un liquide chimique qui, seul, coûte 3 euros de plus que le double du prix de la bouteille vide. Ce produit est vendu dans son contenant au prix de 33 euros. Quel est le prix de la seule bouteille ?

(4) Un forfait A facture 5 euros par mois pour $200Mo$ de données puis 5 centimes par Mo supplémentaire. Le même opérateur propose d'adhérer à un forfait B de $2Go$ de données pour 20 euros par mois. Combien de données doit-on consommer au maximum avec le forfait A avant que la facture ne dépasse celle du forfait B ?

(5) Dans un enclos cohabitent des lapins et des canards qui ont tous le bon nombre de pattes. Il y a en tout 56 pattes dans cet enclos. Pour obtenir le triple du nombre de poules, il faut ajouter 4 au double du nombre de lapins.

(6) On suppose que la distance, en millions de kilomètres, entre la Terre et une comète à trajectoire parabolique, est donnée par le nombre :

$$d(t) = (t-2)^2 + 10$$

Où t est le temps, en année, écoulé depuis août 2024.

Dans quel intervalle de temps la comète se situera-t-elle à moins de 26 millions de km de la Terre ?