

Analyse - TD n°2 : suites réelles usuelles et premières sommes

Exercice 1 (suites arithmétiques)

Les suites réelles suivantes sont-elles arithmétiques ? Justifier !

- (1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = -4n + 3$.
- (2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{5n+2}{7}$.
- (3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^2 - 5$.
- (4) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = (1 + 3n)(2n - 9)$.
- (5) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{n^2+n-6}{n+3}$.
- (6) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 2^{3n+1}$.

Exercice 2 (suites géométriques)

Les suites réelles suivantes sont-elles géométriques ? Justifier !

- (1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 11n + 2$.
- (2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{8}{3-n}$.
- (3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 2 + n^2 + n$.
- (4) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = (1 + n)(2n - 1)$.
- (5) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 3,06 \times 10^{-5} \times 2,08^{4n+1}$.
- (6) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n(n + 1)$.

Exercice 3 (suites arithmétiques et géométriques avec des formules de récurrence)

Pour chacune des suites suivantes :

- déterminer les quatre premiers termes ;
- déterminer s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique, et donner sa raison le cas échéant ;
- écrire, pour tout entier naturel n , le terme d'indice $n + 2$ en fonction du terme d'indice $n + 1$.

- (1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n$.
- (2) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = -4$ et, pour tout entier naturel non nul n , $v_n = 4^{-1}v_{n-1}$.
- (3) La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n , par $w_n = 3^{n^2+1}$.
- (4) $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n\sqrt{3} + 2)_{n \in \mathbb{N}}$
- (5) $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((n + 1)^2 - n^2)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 4 (suites arithmético-géométriques)

- (1) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1$.

Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre u_n en fonction de n .

- (2) On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 5v_n + 1$.

Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre v_n en fonction de n .

Exercice 5 (les suites usuelles en contexte)

Pour chaque situation, proposer une modélisation à l'aide d'une suite bien choisie, puis répondre au problème donné.

- (1) On place un capital de 25 000 euros sur un compte en banque proposant une rémunération à taux d'intérêt simple annuel de 0,75%. Au bout de combien d'années disposera-t-on de 30 000 euros ?
- (2) Une population de bactéries, évoluant dans un reste alimentaire oublié sur une assiette (hors du réfrigérateur), se voit augmenter d'un quart de son effectif toutes les trois heures. Initialement, seule un dizaine de milliers de bactéries étaient présentes. Quelle est la population de bactéries obtenue au bout de deux jours ?
- (3) Johanna place 650 euros sur un « livret jeune » à un taux d'intérêt composé annuel de 3,2%. Donner la valeur exacte du montant de son placement au bout de 5 ans.
- (4) En 2010, une forêt compte 50 000 arbres. Cette forêt étant vieillissante, chaque année, on y abat 5% des arbres existants puis on y replante 3 000 nouveaux arbres. Donner la valeur exacte du nombre de milliers d'arbres que comptera cette forêt en l'an 2030.

Exercice 6 (à la banque...)

Un particulier contracte un emprunt de $M = 250\,000$ euros auprès d'une banque sur 15 ans à un taux d'intérêt annuel de 2%.

On souhaite déterminer le montant constant m à rembourser chaque mois afin de rembourser l'emprunt avec les intérêts portés.

À cette fin, on définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que le nombre u_n représente le montant restant à rembourser après n années écoulées.

- (1) Combien valent u_0 et u_{15} ?
- (2) On pose $a = 12m$ l'annuité correspondant à la mensualité m . Justifier que $u_1 = 1,02u_0 - a$, puis établir, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 14, la relation de récurrence liant les nombres u_{n+1} et u_n .
- (3) Exprimer, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 15, le nombre u_n en fonction de n et de a .
- (4) Dédurre des questions précédentes la valeur de m . (On donnera sa valeur exacte, puis on pourra utiliser la console Python pour obtenir une valeur approchée.)
- (5) Généraliser l'étude avec un emprunt d'un montant M (où M est un nombre réel strictement positif) contracté sur un nombre N d'années (où N est un entier naturel non nul), avec un taux d'intérêt annuel τ (où τ est un nombre réel strictement positif exprimé en pourcentage).

Exercice 7 (des sommes)

A/ Calculer les sommes suivantes :

- (1) $A = 1 + 3 + \dots + 101$; $B = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{-16}{3} + \frac{-18}{3}$; $C = 7 + \frac{36}{5} + \frac{37}{5} + \dots + 10$
- (2) $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{6561}$; $B = 2 - 4 + 8 - \dots + 2048$; $C = \frac{5}{2} + 1 + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2^{20}}{10^{10}}$

B/ Exprimer les sommes suivantes en fonction de l'entier naturel non nul n :

- (1) $A_n = 1 + 3 + \dots + 2n + 1$; $B_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{-2n}{3}$; $C_n = 7 + \frac{36}{5} + \frac{37}{5} + \dots + \frac{36+n}{5}$
- (2) $A_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}$; $B_n = 2 - 4 + 8 - \dots - 4^n$; $C_n = \frac{5}{2} + 1 + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2^{2n}}{10^n}$

C/ Exprimer les sommes du B précédent à l'aide du symbole $\sum$.

Exercice 8 (des formules de récurrence)

(1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \sqrt{2n}$.

(a) Exprimer, pour tout entier naturel n , u_{n+1} en fonction de n .

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = 2$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 0.

(2) On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 = f_1 = 1 ; f_2 = 1 \times 2 ; f_3 = 1 \times 2 \times 3 ; \dots ; f_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

Pour tout entier naturel n , le nombre f_n est appelé **factorielle de n** et se note **$n!$** .

Définir la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide d'une formule de récurrence.