Algèbre et logique - TD n°3 : éléments de logique, raisonnements mathématiques et sommes

A/ Éléments de logiques

Exercice 1

Écrire la négation des phrases suivantes :

(1) La table est en bois ou la chaise est bleue.

(2) Ce chat est drôle et paresseux.

(3) Soit tu seras reçu à HEC, soit tu seras reçu à l'EDHEC.

(4) Soit tu ranges ta chambre, soit tu mets la table.

(5) Si tu ranges ta chambre, alors tu ne seras pas privé d'argent de poche

(6) Si tu ne prends pas de note, alors tu auras une mauvaise note.

Exercice 2

(1) (a) Rappeler, avec les quantificateurs, la définition d'une suite (u_n) strictement croissante à partir du rang q, où q est un entier naturel fixé.

(b) En déduire, avec les quantificateurs, la négation de la proposition précédente, après l'avoir écrite en français dans le texte.

(2) On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, lorsqu'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier naturel n, le nombre u_n est supérieur ou égal à m.

(a) Écrire la définition précédente avec les quantificateurs.

(b) En déduire, avec les quantificateurs, la négation de la proposition précédente, après l'avoir écrite en français dans le texte.

(3) On dit qu'une fonction numérique f est constante sur un intervalle réel I, lorsque, pour tous réels x et y de I, le nombre $f(x)$ est égal au nombre $f(y)$.

(a) Écrire la définition précédente avec les quantificateurs.

(b) En déduire, avec les quantificateurs, la négation de la proposition précédente, après l'avoir écrite en français dans le texte.

(4) Soit f une fonction numérique et I un intervalle réel inclus dans son ensemble de définition.

On considère les deux propositions suivantes :

p_1: « la fonction f est nulle sur l'intervalle I » et p_2: « la fonction f s'annule sur l'intervalle I »

(a) Écrire les propositions précédentes avec les quantificateurs.

(b) En déduire, avec les quantificateurs, la négation des propositions précédentes, après les avoir écrites en français dans le texte.

B/ Raisonnements mathématiques

Exercice 3

On considère la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x = \sqrt{x} \Longrightarrow x \geq 0$$

(1) Justifier que cette proposition est vraie.

(2) La réciproque est-elle vraie ? Justifier !

Exercice 4

En raisonnant par l'absurde, démontrer la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, \frac{3x+1}{x-2} \neq 3$$

Exercice 5

Rappeler et démontrer par récurrence la formule explicite pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Rappeler et démontrer par récurrence la formule donnant la somme des $n + 1$ premiers entiers naturels, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = 5v_n - 1$.
Démontrer par récurrence que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 8

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = -1$ et, pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, v_n = n^2 + n - 1$.

Exercice 9

On pose $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
(1) À quelle condition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
(2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout entier naturel $n, 0 \leq u_n \leq 2$. (On pourra poser pour cela, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : « u_n existe et $0 \leq u_n \leq 2$ ».)

Exercice 10

On pose $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \sqrt{7v_n}$.
(1) À quelle condition la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
(2) Démontrer par récurrence que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout entier naturel $n, 0 \leq w_n \leq w_{n+1} \leq 7$.
(3) Qu'en déduit-on d'intéressant ?

Exercice 11

On rappelle que la factorielle de n, notée $n!$, est définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} 0! = 1 \text{ (par convention)} \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = n! \times (n+1) \end{cases}$$

(1) Écrire explicitement le nombre $n!$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.
(2) Déterminer le sens de variation de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$.
(3) Démontrer que la propriété P_n: « $n! \geq 2^n$ » est héréditaire pour tout entier naturel non nul n.
(4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n la propriété P_n est-elle vraie ?

C/ Avec des sommes

Exercice 12

On pose, pour tout entier naturel $n, S_n = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2$.

(1) Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

(2) Écrire, pour tout entier naturel n, le nombre S_n à l'aide du symbole de sommation $\sum$.

(3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 13

On pose, pour tout entier naturel $n, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k}$.

(1) Déterminer le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Déterminer, pour tout entier naturel n, une écriture explicite du nombre S_n (2 méthodes).

Exercice 14

Calculer explicitement, en fonction de l'entier naturel n, les sommes suivantes :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_{n,1} = \sum_{k=0}^{2n-1} 5^{-k+3}$ (2 méthodes) ;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n,2} = \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}\right)$;

(3) $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n,3} = \sum_{k=n}^{2n} k$ (2 méthodes) ;

(4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_{n,4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k+3}{n}$ (2 méthodes) ;

(5) $\forall n \in [\![2 ; +\infty[\![, s_{n,5} = \sum_{k=2}^{n} \frac{4^k - 3^{k+1}}{n^2+1}$.

Exercice 15

Pour tout entier naturel n, on note I_n le $(n+1)^{\text{ème}}$ entier naturel impair (ainsi $I_0 = 1, I_1 = 3, I_2 = 5$, etc.) et $s_n = I_0 + I_1 + I_2 + \cdots + I_n$.

(1) Calculer s_0, s_1, s_2 et s_3.

(2) Donner, pour tout entier naturel n, une écriture de s_n à l'aide du symbole $\sum$.

(3) Quitte à calculer quelques termes supplémentaires de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quelle conjecture peut-on émettre, pour tout entier naturel n, sur la valeur de s_n ? (Exprimée en fonction de n.)

(4) Démontrer la conjecture précédente par récurrence (en espérant qu'elle soit correcte !).

(5) En remarquant que, pour tout entier naturel k, $I_k = 2k + 1$, démontrer le résultat précédent avec un deuxième méthode utilisant les propriétés du symbole $\sum$.

(6) En remarquant que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite usuelle, démontrer le résultat précédent avec une troisième méthode.