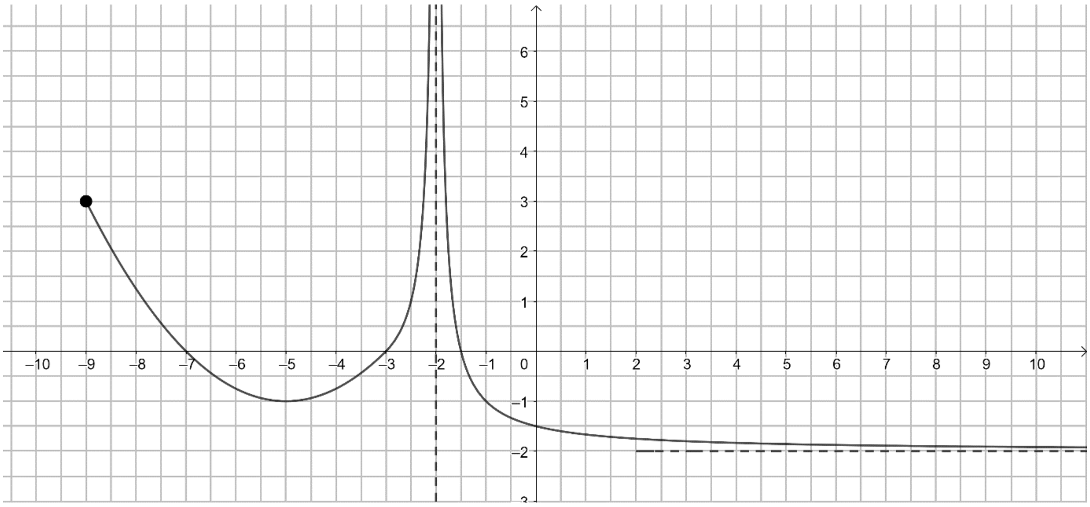
Analyse - TD n°4 : généralités sur les fonctions

Exercice 1 (lectures graphiques)

(1) On considère dans un repère orthonormé du plan, sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f. Celle-ci admet deux asymptotes : une asymptote verticale d'équation $x = -2$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.



(1) Donner D_f, l'ensemble de définition de f.

(2) (a) Donner $f(0)$.

(b) Quelle est l'image de $-\frac{5}{2}$ par f ?

(c) Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de -1 par f.

(d) Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de -3 par f.

(e) Le nombre 10^{30} admet-il des antécédents par f ? Si oui, combien ? Qu'est-ce qui permet d'affirmer cela ?

(3) (a) Donner les extrema globaux et locaux éventuels de f sur son ensemble de définition.

(b) Donner les extrema globaux et locaux éventuels de f sur l'intervalle $[-9; -2[$.

(4) (a) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-9; -3]$.

(b) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in]-\frac{3}{2}; +\infty[$.

(5) (a) Résoudre graphiquement l'équation $(E_1): f(x) = 0$.

(b) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I_2): f(x) > -1$.

(6) Dresser le tableau de signes de f sur son ensemble de définition.

(7) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 2 (lectures graphiques)

On considère dans un repère orthonormé du plan, sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f. Celle-ci admet deux asymptotes : une asymptote verticale d'équation $x = -3$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.

(1) Donner D_f, l'ensemble de définition de f.

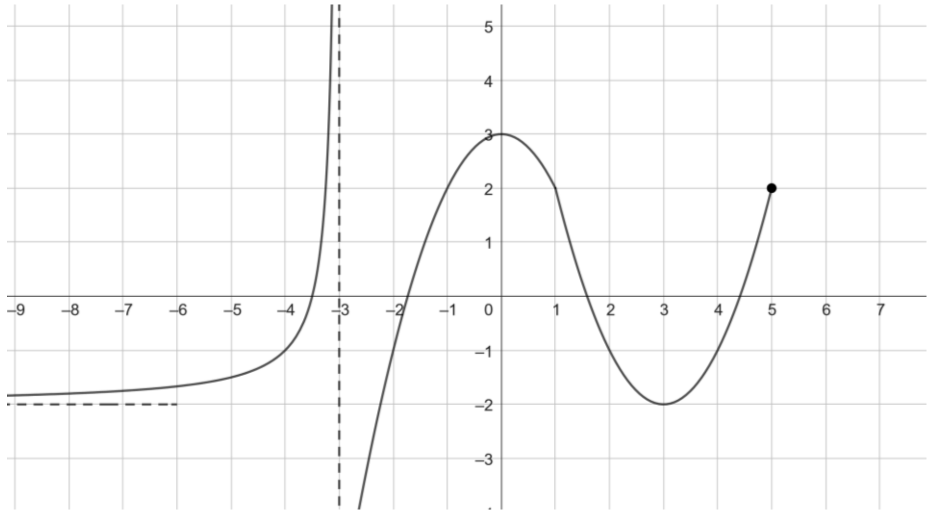
(2) (a) Donner $f(0)$.

(b) Quelle est l'image de 1 par f ?

(c) Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de -1 par f.

(d) Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de -2 par f.

(e) Le nombre -10^{30} admet-il des antécédents par f ? Si oui, combien ? Qu'est-ce qui permet d'affirmer cela ?
(3) (a) Donner les extrema globaux et locaux éventuels de f sur son ensemble de définition.
(b) Donner les extrema globaux et locaux éventuels de f sur l'intervalle $]-\infty;-3[$.
(4) (a) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-2;2]$.
(b) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in]-\infty;-4]$.
(5) (a) Résoudre graphiquement l'équation $(E_1): f(x)=3$.
(b) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I_2): f(x) \leq -1$.
(6) Dresser le tableau de signes de f sur son ensemble de définition.
(7) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.



Exercice 3 (ensembles de définition, composition)
Soient les fonctions f, g, h et k définies par :

$$f(x)=x^2-5x+\frac{11}{7}, g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}, h(x)=2x-\frac{\sqrt{x}}{2} \text{ et } k(x)=x+\sqrt{x^2-5x+6}$$

(1) Déterminer les ensembles de définition de ces fonctions.
(2) Simplifier au mieux les expressions suivantes (on ne demande pas les nouveaux ensembles de définition) :

$$f\left(\frac{1}{x}\right), g(x^2+1), h(16x) \text{ et } k(-2x+1)$$

Exercice 4 (ensembles de définition, intersections avec les axes)
Soient les fonctions f, g, h et k définies par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-5}{x+1}}, g(x)=\frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-1}}, h(x)=\frac{(x^2-3x+8)}{2x^2-x+1} \text{ et } k(x)=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

(1) Déterminer les ensembles de définition de ces fonctions.
(2) Déterminer, pour chacune de ces fonctions, les coordonnées des éventuels points d'intersection entre leurs courbes représentatives respectives et les axes du repère.

Exercice 5 (parité éventuelle)
Pour chacune des fonctions suivantes (données par leurs expressions analytiques respectives), déterminer son ensemble de définition et sa parité éventuelle :

$$f(x)=5x^4+\frac{x^2}{3}-7, g(x)=x^5+x^4, h(x)=\frac{(x^6+x^2-7)}{x-x^3}, k(x)=x^2-\sqrt{x^2+2} \text{ et } m(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$$

Exercice 6 (un peu de théorie sur les fonctions paires et les fonctions impaires)
On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.
(1) (a) On suppose que f est paire. Quelle est la parité éventuelle de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xf(x)$?
(b) On suppose que f et g sont paires. Démontrer que leur somme est encore une fonction paire. Quelle est la parité éventuelle de leur produit ?
(c) Démontrer que si f est paire et impaire à la fois, alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
(2) (a) On suppose que f est impaire. Quelle est la parité éventuelle de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xf(x)$?
(b) On suppose que f et g sont impaires. Démontrer que leur somme est encore une fonction impaire. Quelle est la parité éventuelle de leur produit ?
(c) Démontrer que si f est impaire, alors $f(0) = 0$.

Exercice 7 (minorants, majorants, extrema ?)
On pose $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x+1}$.
(1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(2) Justifier que f est minorée sur son ensemble de définition.
(3) Démontrer que f est majorée par 4 sur son ensemble de définition.
(4) Le réel 4 est-il le maximum de f sur son ensemble de définition ? Le minorant trouvé dans la question (2) est-il le minimum de f sur son ensemble de définition ?

Exercice 8 (minorants, majorants, extrema ?)
On pose $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$.
(1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(2) Déterminer la parité éventuelle de f.
(3) Démontrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. En déduire un minorant de f sur $\mathbb{R}$.
(4) Les minorant et majorant trouvés dans la question précédente sont-ils respectivement le minimum et le maximum de f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 (composition)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{7x}{x^2+x+1}$$
(1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(2) Déterminer les éventuels antécédents de 0 par f.
(3) On pose $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$. Déterminer les expressions des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$. Donner les ensembles de définition associés.

Exercice 10 (composition)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{3x-\sqrt{2}}{x^2+1}$$
(1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(2) Déterminer les éventuels antécédents de 0 par f.
(3) On pose $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer les expressions des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$. Donner les ensembles de définition associés.

Exercice 11 (sens de variation et signe de fonctions affines)
Donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions affines suivantes (en justifiant), puis en dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$:
(1) $f(x) = 2x - 3$
(2) $g(x) = -5x + 7$
(3) $h(x) = 1 - \sqrt{2}x$
(4) $k(x) = 4 - \frac{1}{7}x$

Exercice 12 (sens de variation et signe de fonctions trinômes du second degré)
Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$, ainsi que le tableau de signes sur $\mathbb{R}$, des fonctions trinômes du second degré suivantes, en justifiant :
(1) $f(x) = 2x^2 - 2x - 24$
(2) $g(x) = x^2 + 3x + 7$
(3) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$
(4) $k(x) = -x^2 + 81$

Exercice 13 (sens de variation)
(1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.
(a) Déterminer la parité éventuelle de la fonction f.
(b) Démontrer que, pour tous réels a et b, $f(a) - f(b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire son sens de variation sur $\mathbb{R}$.
(2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$.
(a) Déterminer la parité éventuelle de la fonction f.
(b) Démontrer que, pour tous réels a et b, $g(a) - g(b) = \frac{2(a-b)(a+b)}{(a^2+1)(b^2+1)}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire son sens de variation sur $\mathbb{R}$.
(3) Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{4-3x}{x+1}$.
(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(b) Démontrer que, pour tous réels a et b différents de -1, $h(a) - h(b) = \frac{7(b-a)}{(a+1)(b+1)}$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

Exercice 14 (un peu de théorie sur le sens de variation et aplication)
(1) Soient f et g deux fonctions numériques, I un intervalle de nombres réels inclus dans $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, leurs ensembles de définition respectifs.
Démontrer que si f et g sont croissantes sur I, alors la fonction $f + g$ est également croissante sur I.
On montre de même que si f et g sont décroissantes sur I, alors la fonction $f + g$ est également décroissante sur I.
On montre de même que les deux résultats précédents restent vrais en remplaçant « monotone » par « strictement monotone ».
(2) Soient f et g deux fonctions numériques, I un intervalle de nombres réels inclus dans $\mathcal{D}_f$, J un intervalle de nombres réels inclus dans $\mathcal{D}_g$, tels que :

$$\forall x \in I, f(x) \in J$$

(a) Démontrer que si f est croissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
(b) Démontrer que si f est croissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

On montre de même que si f est décroissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
On montre également de même que si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
On montre enfin de même que les résultats précédents restent vrais en remplaçant « monotone » par « strictement monotone ».
(3) Application :
(a) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
(b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $g(x) = \frac{\frac{1}{3}x+5}{x-2}$.
(i) Démontrer que, pour tout réel x de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $g(x) = \frac{1}{3} + \frac{\frac{17}{3}}{x-2}$.
(ii) Déterminer les trois fonctions u, v et w telles que $g = w \circ v \circ u$, avec w et u des fonctions affines. On donnera le schéma de composition.
(iii) En déduire le sens de variation de g sur les intervalles $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$.
(c) On considère la fonction h définie par $h(x) = 2 - 7\sqrt{x^2 - 9}$.
(i) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de la fonction h.
(ii) Déterminer la parité éventuelle de h.
(iii) Justifier que la fonction trinôme du second degré $r: x \mapsto x^2 - 9$ est croissante sur $[3; +\infty[$.
(iv) Déterminer les deux fonctions s et t telles que $h = t \circ s \circ r$, avec t une fonction affine. On donnera le schéma de composition.
(v) En déduire le sens de variation de h sur l'intervalle $[3; +\infty[$.
(vi) En déduire le sens de variation de h sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.